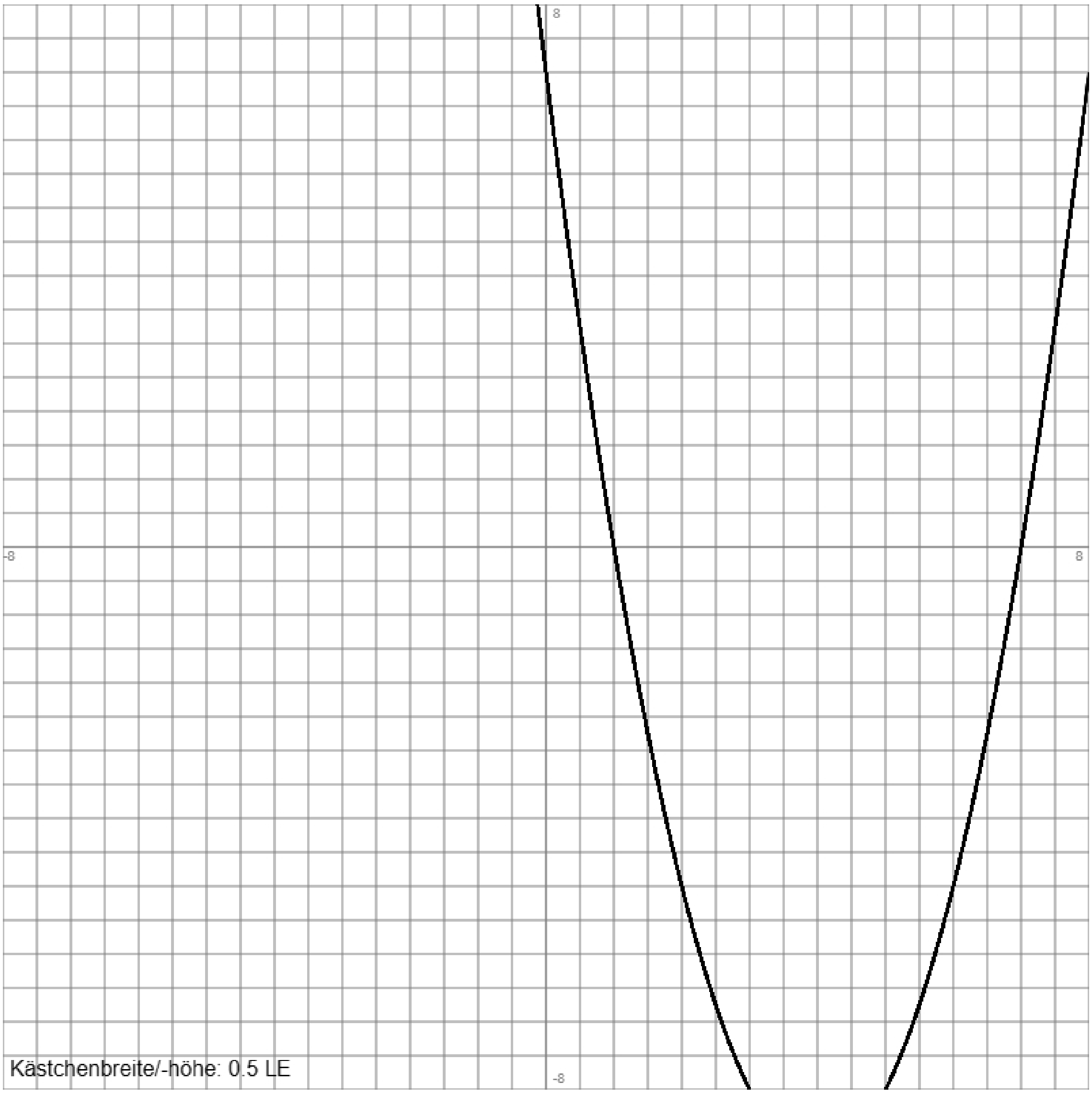
Michael Buhlmann

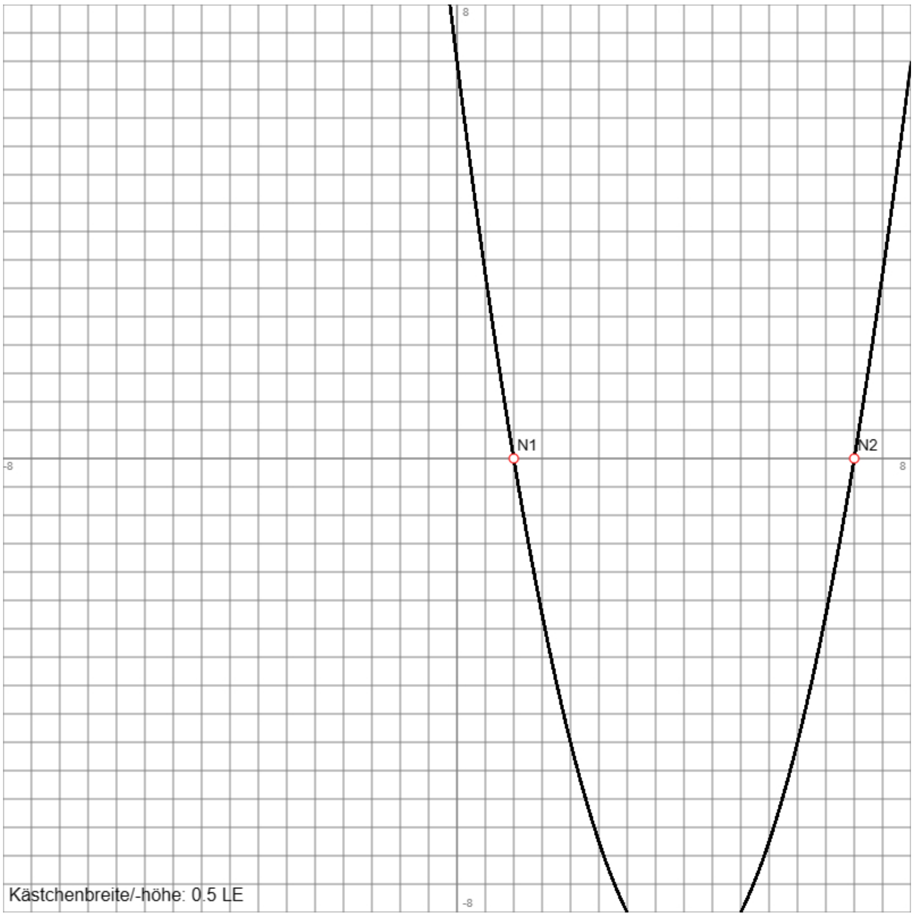
Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Der Graph einer nach oben geöffneten Normalparabel ist gegeben als:



Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Die <u>Funktionsvorschrift</u> einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Normalform $y = x^2 + bx + c$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) sind nach der Punktprobe von zwei Parabelpunkten die Koeffizienten b und c zu bestimmen. Die Parabelpunkte P, Q sind aus dem vorgegebenen Graphen der Parabel zu bestimmen.



II. Wir wählen die gut ablesbaren Nullstellen $N_1(1|0)$, $N_2(7|0)$ als vorzugebende Parabelpunkte. Hinsichtlich der <u>Bestimmung der Funktionsgleichung</u> der Normalparabel gehen wir von der (Normal-) Form $y = x^2 + bx + c$ aus und erhalten wegen der Punktprobe (Einsetzen) der Punkte $N_1(1|0)$ und $N_2(7|0)$ das lineare Gleichungssystem:

$N_1(1|0)$ ($x = 1$, $y = 0$, $y = x^2+bx+c$ ->): $0 = 1^2 + b\cdot 1 + c \Rightarrow 0 = 1 + b + c$
$N_2(7|0)$ ($x = 7$, $y = 0$, $y = x^2+bx+c$ ->): $0 = 7^2 + b\cdot 7 + c \Rightarrow 0 = 49 + 7b + c$

Wir formen das lineare Gleichungssystem um und wenden das Additionsverfahren an, indem wir z.B. Gleichung (2) mit -1 multiplizieren

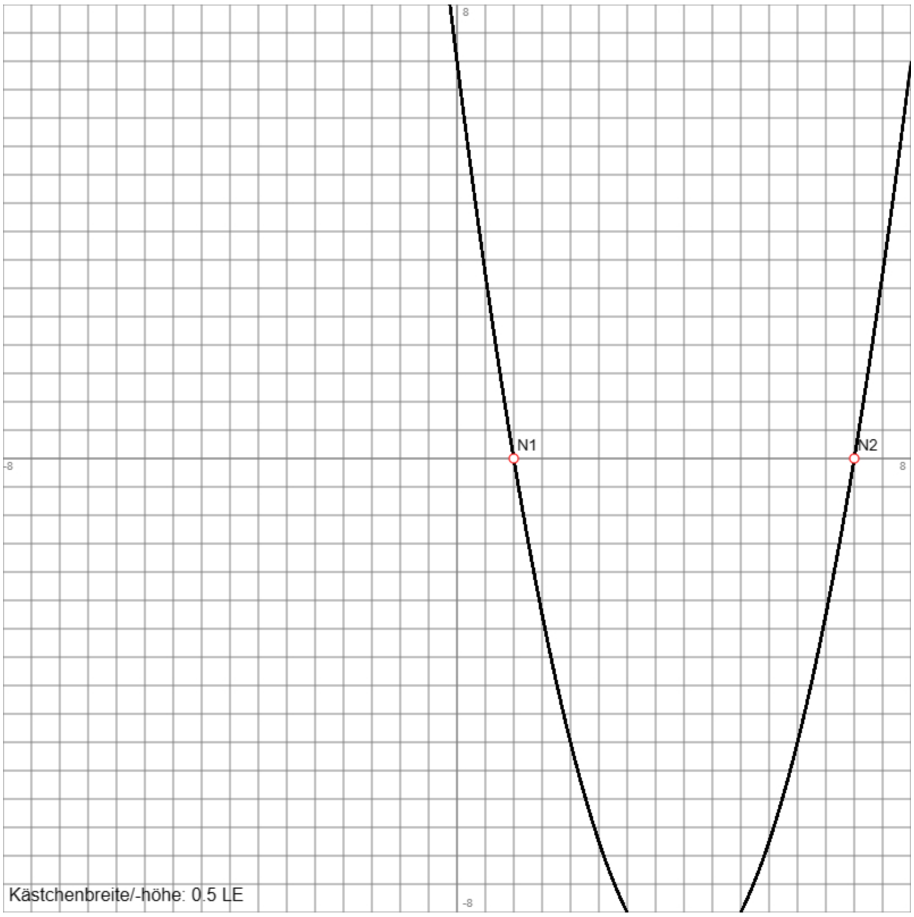
(1) $0 = 1 + b + c$	
(2) $0 = 49 + 7b + c$	$\mid \cdot(-1)$
(1) $0 = 1 + b + c$	
(2') $0 = -49 - 7b - c$	(Addition der Gleichungen (1) und (2'))
(3) $0 = -48 - 6b$	$\mid +6b$
$6b = -48$	$\mid :6$
$b = -8$	
(1) $0 = 1 + b + c$	(Einsetzen von b = -2 in Gleichung (1))
$0 = 1 - 8 + c$	
$0 = -7 + c$	$\mid +7$
$7 = c$	

Die Parabelgleichung lautet also wegen $b = -8$ und $c = 7$ in der Normalform: $y = x^2 - 8x + 7$.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet lässt sich aus den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$ bestimmen, falls (eine oder) die zwei Nullstellen existieren. Dann gilt die Produktform der Parabelgleichung:

$$y = (x-x_1)(x-x_2),$$

wobei Letztere leicht in die Normalform $y = x^2 + bx + c$ umgerechnet werden kann.



II. Wir wählen die gut ablesbaren Nullstellen $N_1(1|0)$, $N_2(7|0)$ als vorzugebende Parabelpunkte. Hinsichtlich der Bestimmung der Funktionsgleichung der Normalparabel bilden wir die Produktform:

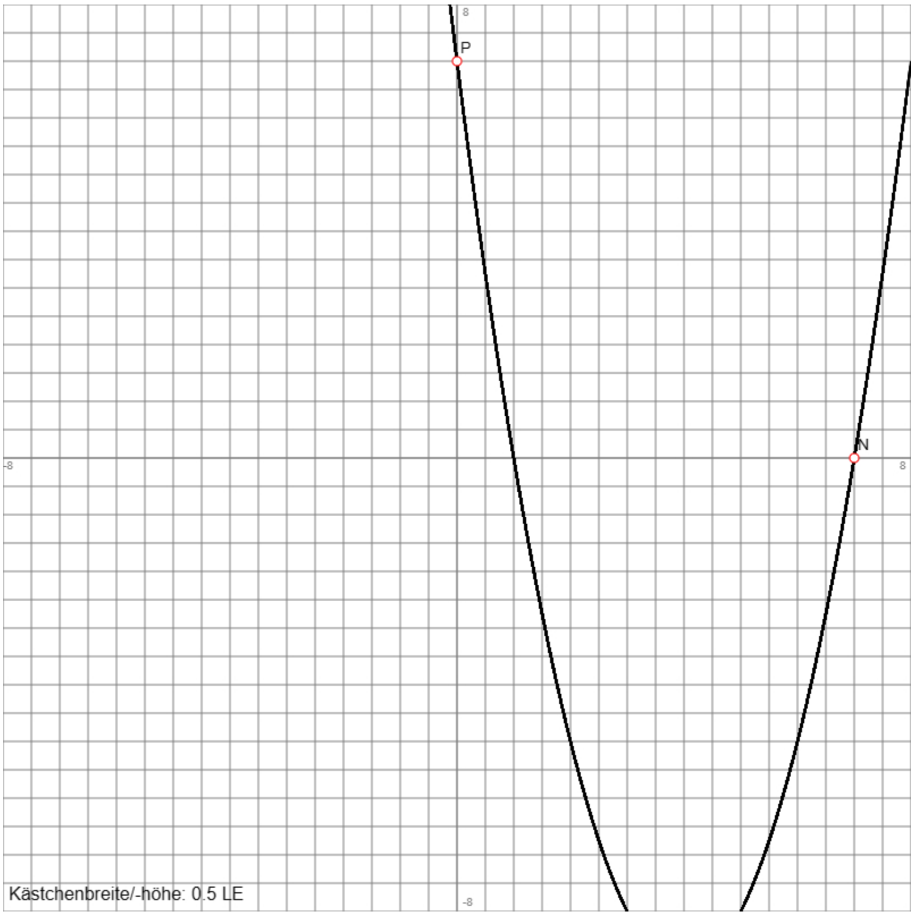
$y = (x-1)(x-7)$

und wandeln diese in die Normalform um:

$y = (x-1)(x-7) = x^2 – 7x – x + 7 = x^2 – 8x + 7$.

Die Parabelgleichung lautet also in der Normalform: $y = x^2 – 8x + 7$.

3. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Normalform $y = x^2 + bx + c$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) sind nach der Punktprobe von zwei Parabelpunkten die Koeffizienten b und c zu bestimmen. Die Parabelpunkte P, Q sind aus dem vorgegebenen Graphen der Parabel zu bestimmen. Vorzugsweise können, falls möglich, dazu als Parabelpunkte die Schnittpunkte mit den Achsen des x-y-Koordinatensystems ausgewählt werden, insbesondere der y-Achsenabschnittspunkt P(0|c) zur sofortigen Bestimmung des Koeffizienten c in der Normalform der Parabelgleichung.



II. Wir lesen den y-Achsenabschnittspunkt P(0|7) und die Nullstelle N(7|0) aus der obigen Zeichnung ab. Hinsichtlich der Bestimmung der Funktionsgleichung der Normalparabel gehen wir von der (Normal-) Form $y = x^2 + bx + c$ aus und erhalten wegen der Punktprobe (Einsetzen) der Punkte P(0|7) und N(7|0) das lineare Gleichungssystem:

P(0|7) ($x = 0$, $y = 7$, $y = x^2+bx+c$ ->): $7 = 0^2 + b\cdot 0 + c$ => $7 = c$
N(7|0) ($x = 7$, $y = 0$, $y = x^2+bx+c$ ->): $0 = 7^2 + b\cdot 7 + c$ => $0 = 49 + 7b + c$.

Der Koeffizient $c = 7$ ist damit sofort bestimmt. Wir setzen den Wert in die zweite Gleichung des Gleichungssystems ein und erhalten:

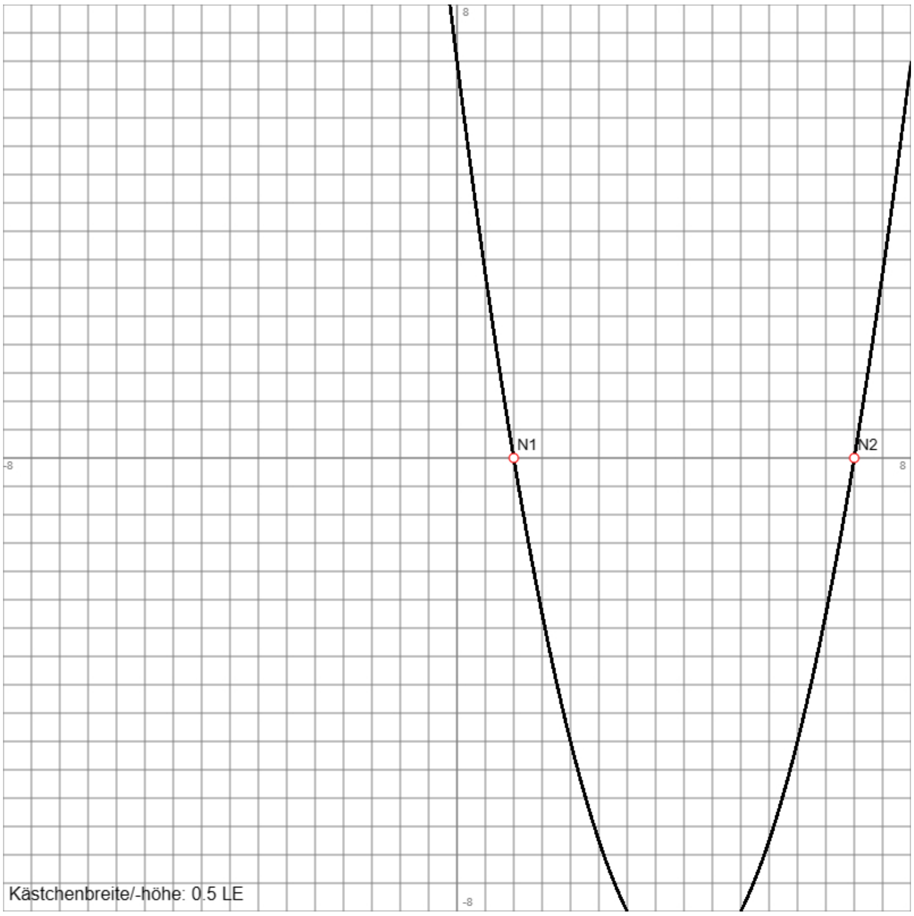
$0 = 49 + 7b + 7$
$0 = 56 + 7b \quad | -56$
$-56 = 7b \quad | :7$
$-8 = b$.

Damit ist die Parabelgleichung bestimmt. Die Parabelgleichung lautet wegen $b = -8$ und $c = 7$ in der Normalform: $y = x^2 - 8x + 7$.

4. Lösung: I. Allgemein gilt: Die <u>Funktionsvorschrift</u> einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Scheitelform y = $(x-d)^2 + e$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Der Punkt S(d|e) ist der Scheitelpunkt der Parabel und bestimmt sich aus zwei vorgegebenen Parabelpunkte die Koeffizienten $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$, die dieselbe y-Koordinate haben, vermöge:

$$d = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; e = y_0 - (x_1 - d)^2 = y_0 - (x_2 - d)^2.$$

Die x-Koordinate d des Scheitelpunkts S ist also die Mitte der x-Koordinaten x_1, x_2 der Punkte $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$, die y-Koordinate e des Scheitelpunkts S errechnet sich, indem von der y-Koordinate y_0 der Punkte $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$ das Quadrat der Differenz zwischen der x-Koordinate x_1 oder x_2 eines der vorgegebenen Punkte P, Q und der x-Koordinate des Scheitelpunktes d abgezogen wird. Diese Vorgehensweise zur Bestimmung einer Parabelgleichung beruht damit auf der Achsensymmetrie einer Normalparabel zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt.



II. Wir wählen die gut ablesbaren Nullstellen $N_1(1|0)$, $N_2(7|0)$ als vorzugebende Parabelpunkte. Zur <u>Bestimmung des Scheitelpunkts</u> der Normalparabel berechnen wir wegen der vorgegebenen Punkte $N_1(1|0)$ und $N_2(7|0)$ (mit: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$) zunächst die x-Koordinate des Parabelscheitels S(d|e):

$$d = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Die x-Koordinate d = 4 des Scheitelpunkts liegt damit offensichtlich in der Mitte zwischen 1 und 7, der Abstand bzw. die Differenz zwischen d = 4 und 7 beträgt 7 – 4 = 3, so dass sich (mit: $y_0 = 0$) die y-Koordinate des Parabelscheitels S(d|e) ergibt als:

$e = 0 - 3^2 = -9$.

Der Scheitelpunkt lautet damit: S(4|-9). Die <u>Scheitelform</u> der gesuchten Parabel ist:

$y = (x-4)^2 - 9$,

die <u>Normalform</u> lautet (unter Verwendung der 2. binomischen Formel):

$y = (x-4)^2 - 9 = x^2 - 8x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7$.

www.michael-buhlmann.de / 03.2024 / Aufgabe 2036