Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Stelle dar, welche Eigenschaften die Graphen von quadratischen Funktionen als allgemeine Parabeln (mit Scheitelpunkt auf der y-Achse des x-y-Koordinatensystems) und als (im x-y-Koordinatensystem verschobene) nach oben geöffnete verschobene Normalparabeln besitzen.

Lösung: I. Normalparabeln sind quadratische Funktionen von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform), $y = (x–d)^2 + e$ (Scheitelform) mit reellen Zahlen b, c, dem Scheitelpunkt S(d|e). Eine allgemeine Parabel mit Scheitelpunkt S(0|c) (auf der y-Achse) besitzt die Form: $y = ax^2 + c$; sie ist nach oben geöffnet, wenn a>0, nach unten geöffnet, wenn a<0; ist a<-1 oder a>1, so ist die Parabel schmaler im Vergleich zur nach oben geöffneten Normalparabel $y = x^2$, ist -1<a<1, so ist sie breiter im Vergleich zur Normalparabel.

II. Im Einzelnen gilt dann die folgende tabellarische Übersicht:

Allgemeine Parabeln $y = ax^2 + c$
Normalform = Scheitelform -> Scheitelpunkt $S(0\mid c)$
y-Achsenabschnittspunkt = Scheitelpunkt $S(0\mid c)$

Nullstellen:	$a>0$	$a<0$
$c>0$	keine	$N(-\sqrt{-\frac{c}{a}}\mid 0)$, $N(\sqrt{-\frac{c}{a}}\mid 0)$
$c=0$	$N(0\mid 0) = S(0\mid 0)$	$N(0\mid 0) = S(0\mid 0)$
$c<0$	$N(-\sqrt{-\frac{c}{a}}\mid 0)$, $N(\sqrt{-\frac{c}{a}}\mid 0)$	keine

Eigenschaften:	$a<0$			$a>0$		
	$a<-1$	$a=-1$	$-1<a<0$	$0<a<1$	$a=1$	$a>1$
	nach unten geöffnet			nach oben geöffnet		
	schmaler als	wie	breiter als	breiter als	wie	schmaler als
	Normalparabel			Normalparabel		
$c>0$	nach oben verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid c)$ oberhalb der x-Achse, zwei Nullstellen			nach oben verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid c)$ oberhalb der x-Achse, keine Nullstellen		
$c=0$	nicht verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid 0)$ auf der x-Achse, Nullstelle $N(0\mid 0) = S(0\mid 0)$			nicht verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid 0)$ auf der x-Achse, Nullstelle $N(0\mid 0) = S(0\mid 0)$		
$c<0$	nach unten verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid c)$ unterhalb der x-Achse, keine Nullstellen			nach unten verschoben, Scheitelpunkt $S(0\mid c)$ unterhalb der x-Achse, zwei Nullstellen		
	achsensymmetrisch zur y-Achse (x = 0)					

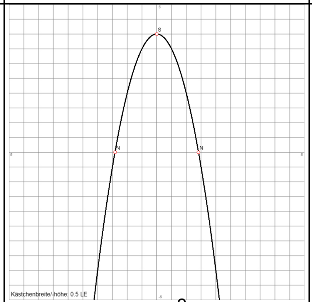
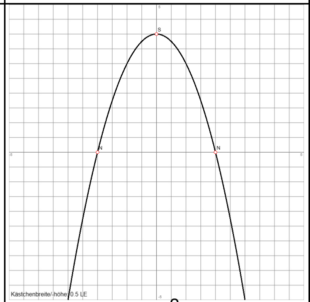
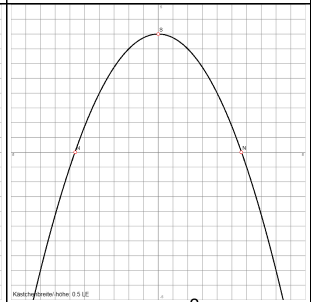
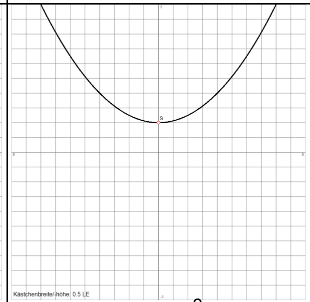
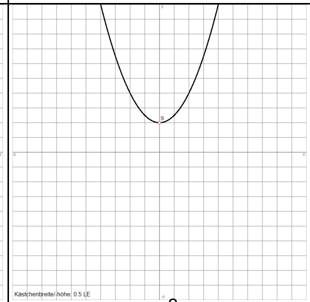
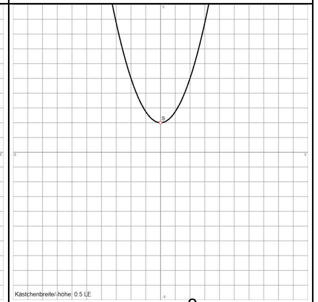
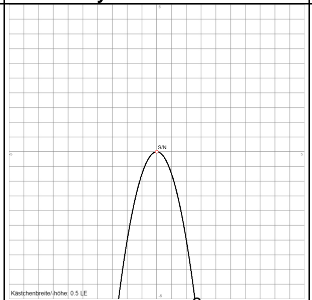
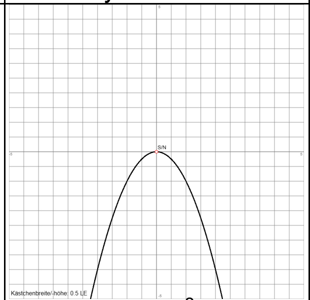
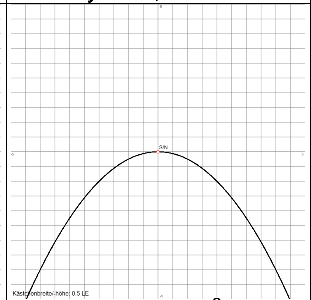
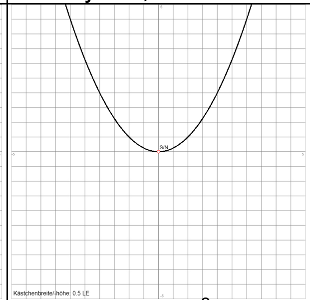
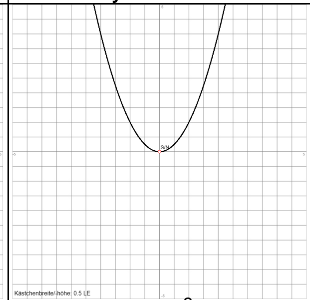
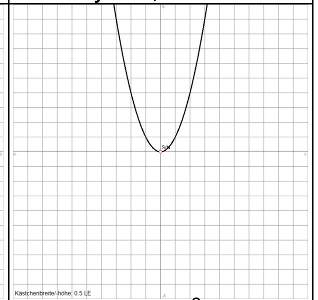
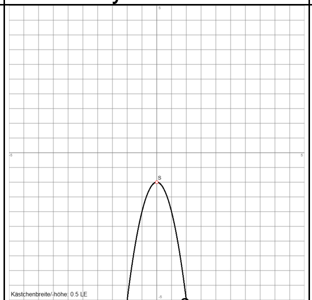
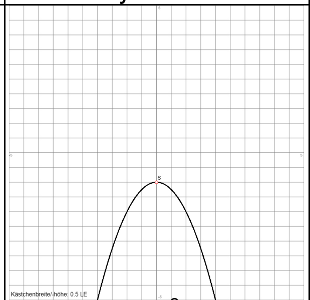
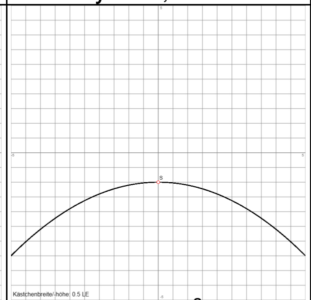
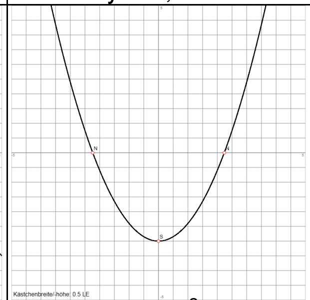
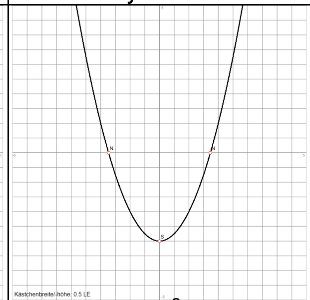
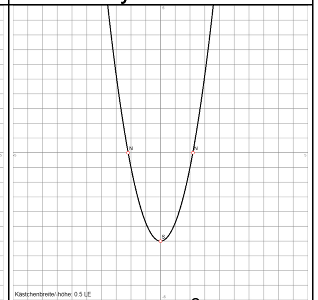
Nach oben geöffnete verschobene Normalparabeln: $y = x^2 + bx + c$
Normalform: $y = x^2 + bx + c$ Scheitelform: $y = (x-d)^2 + e$ -> Scheitelpunkt $S(d\mid e)$ (mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \frac{b^2}{4}$)
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\mid c)$

Nullstellen:	
$e>0$	keine
$e=0$	$N(d\mid 0) = S(d\mid 0)$
$e<0$	$N(d-\sqrt{-e}\mid 0)$, $N(d+\sqrt{-e}\mid 0)$

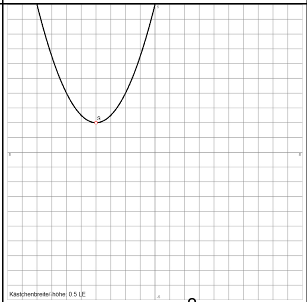
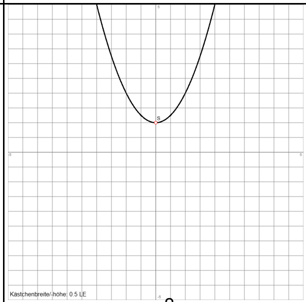
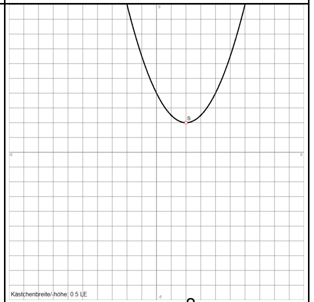
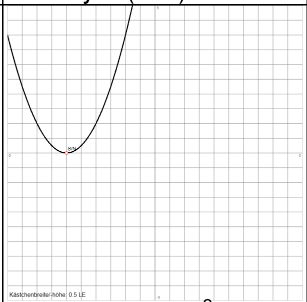
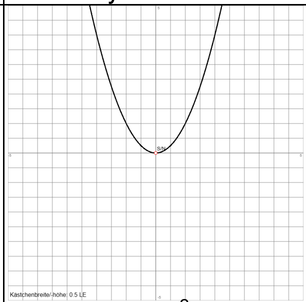
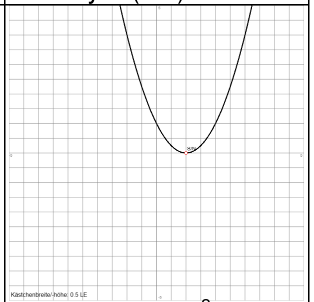
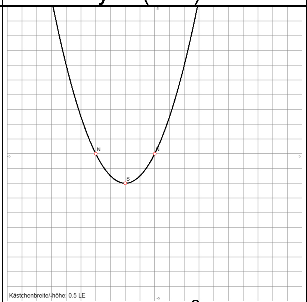
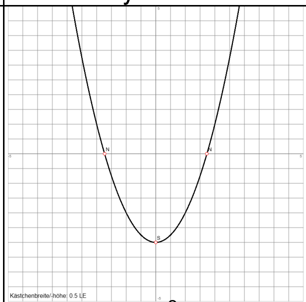
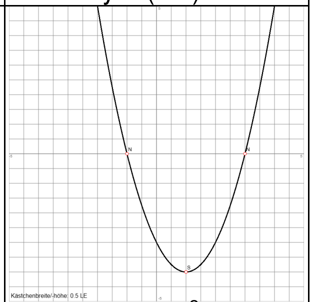
$D = \frac{b^2}{4} - c < 0$	$D = \frac{b^2}{4} - c = 0$	$D = \frac{b^2}{4} - c > 0$
keine	$N(-\frac{b}{2}\mid 0) = S(d\mid 0)$	$N(-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\mid 0)$, $N(-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\mid 0)$

Eigenschaften:			
	nach oben geöffnet		
	Normalparabel		
	$d<0$	$d=0$	$d>0$
$e>0$	nach links und oben verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, keine Nullstellen	nach oben verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, keine Nullstellen	nach rechts und oben verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, keine Nullstellen
$e=0$	nach links verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid 0)$, Nullstelle $N(d\mid 0) = S(d\mid 0)$	Scheitelpunkt $S(0\mid 0)$, Nullstelle $N(0\mid 0) = S(0\mid 0)$ (Standardnormalparabel)	nach rechts verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid 0)$, Nullstelle $N(d\mid 0) = S(d\mid 0)$
$e<0$	nach links und unten verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, zwei Nullstellen	nach unten verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, zwei Nullstellen	nach rechts und unten verschoben, Scheitelpunkt $S(d\mid e)$, zwei Nullstellen
	achsensymmetrisch zur Achse durch Scheitelpunkt (x = d)		

III. Für <u>allgemeine Parabeln</u> $y = ax^2 + c$ (mit Scheitelpunkt auf der y-Achse) ergibt sich gemäß der Eigenschaftentabelle in II. die grafische Aufbereitung:

Allgemeine Parabeln $y = ax^2 + c$						
Eigenschaften:	$a<0$			$a>0$		
	$a<-1$	$a=-1$	$-1<a<0$	$0<a<1$	$a=1$	$a>1$
$c>0$	 $y = -2x^2+4$	 $y = -x^2+4$	 $y = -0,5x^2+4$	 $y = 0,25x^2+1$	 $y = x^2+1$	 $y = 1,5x^2+1$
$c=0$	 $y = -3x^2$	 $y = -x^2$	 $y = -0,25x^2$	 $y = 0,5x^2$	 $y = x^2$	 $y = 2x^2$
$c<0$	 $y = -4x^2-1$	 $y = -x^2+1$	 $y = -0,1x^2-1$	 $y = 0,6x^2-3$	 $y = x^2-3$	 $y = 2,5x^2-3$

IV. Für <u>nach oben geöffnete verschobene Normalparabeln</u> $y = x^2 + bx + c = (x-d)^2 + e$ ergibt sich gemäß der Eigenschaftentabelle in II. die grafische Aufbereitung:

Eigenschaften:			
	$d<0$	$d=0$	$d>0$
$e>0$	 $y = (x+2)^2+1$	 $y = x^2+1$	 $y = (x-1)^2+1$
$e=0$	 $y = (x+3)^2$	 $y = x^2$	 $y = (x-1)^2$
$e<0$	 $y = (x+1)^2-1$	 $y = x^2-3$	 $y = (x-1)^2-4$

www.michael-buhlmann.de / 04.2024 / Aufgabe 2042