Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Die Parabel p_1: $y = ax^2 + c$ besitzt den Scheitelpunkt $S_1(0|4)$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -1$. Der Graph der nach oben geöffneten Normalparabel p_2: $y = x^2 + bx + c$ berührt den positiven Teil der x-Achse im x-y-Koordinatensystem und schneidet die y-Achse im Scheitelpunkt der Parabel p_1. Berechne den zweiten Schnittpunkt P der beiden Parabeln.

Lösung: I. Es gilt: Allgemeine Parabeln mit Scheitelpunkt $S(0|c)$ auf der y-Achse haben die Scheitel- und Normalform: $y = ax^2 + c$. Der Koeffizient a errechnet sich mittels Punktprobe aus einem vorgegebenen Punkt.

II. In der Parabelgleichung p_1: $y = ax^2 + c$ ist der Summand c gleich der y-Koordinate des vorgegebenen Scheitelpunkts $S_1(0|4)$, also: $c = 4$. Mit $y = ax^2 + 4$ und der Parabelnullstelle $N(-1|0)$ ergibt sich vermöge der Punktprobe:

$N(-1|0)$ $(x=-1, y=0)$, $y = ax^2+4 \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = a + 4 \Leftrightarrow a = -4$,

so dass der <u>Funktionsterm</u> $y = -4x^2 + 4$ gilt.

III. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten verschobenen Normalparabel lautet gemäß der Scheitelform $y = (x-d)^2 + e$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Der Punkt $S(d|e)$ ist der Scheitelpunkt der Parabel, aus ihm ergibt sich die Scheitelform, ausgerechnet gemäß den binomischen Formeln die Normalform $y = x^2 + bx + c$.

IV. Die nach oben geöffnete verschobene Normalparabel p_2 berührt die x-Achse des x-y-Koordinatensystems in ihrem positiven Teil, der Scheitelpunkt $S_2(d|0)$ liegt also auf der x-Achse mit $d > 0$. Die Scheitelform der Parabel lautet damit: $y = (x-d)^2$. Der Scheitelpunkt $S_1(0|4)$ der Parabel p_1 ist der y-Achsenabschnittspunkt der Parabel p_2, so dass mit der Punktprobe von S_1 die x-Koordinate d des Scheitelpunkts S_2 errechnet werden kann; es gilt:

$S_1(0|4)$ $(x=0, y=4)$, $y = (x-d)^2 \Rightarrow 4 = (0-d)^2 \Leftrightarrow 4 = d^2 \Leftrightarrow d = \pm 2$.

Nur das positive $d = 2$ ist hier relevant mit Scheitelpunkt $S_2(2|0)$. Der gesuchte <u>Funktionsterm</u> lautet: $y = (x-2)^2$ (in der Scheitelform) bzw: $y = x^2 - 4x + 4$ (in der Normalform, 2. binomische Formel).

V. Zur Berechnung der Schnittpunkte zwischen zwei Parabeln sind die Funktionsterme der Parabeln gleichzusetzen (y = y) und ist die entstandene Gleichung (in x) nach der Unbekannten aufzulösen. Dabei können als Vorgehensweisen die bei linearen Gleichungen, die Lösungsformel oder das Ausklammern mit Satz vom Nullprodukt zur Anwendung kommen. Die y-Koordinaten der Schnittpunkte ergeben sich durch Einsetzen der errechneten x-Werte in eine der Parabelgleichungen.

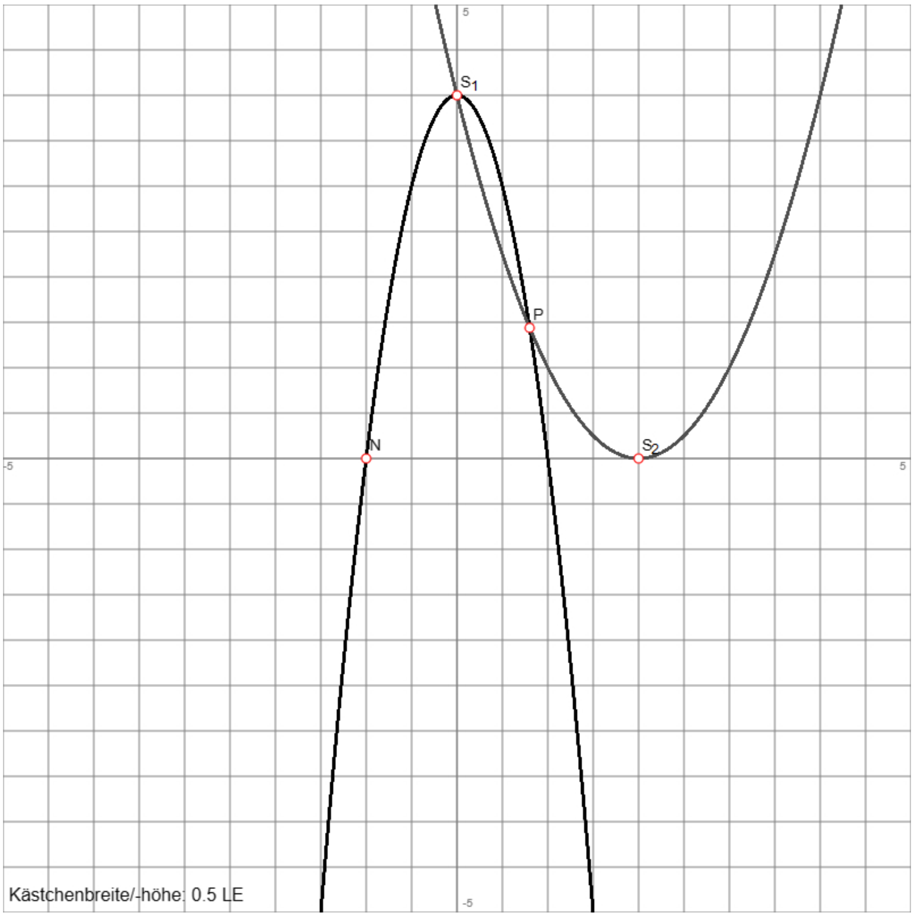
VI. Wir setzen die Funktionsterme der Parabeln p_1: $y = -4x^2 + 4$ und p_2: $y = x^2 - 4x + 4$ gleich und haben:

$y = y$	
$-4x^2 + 4 = x^2 - 4x + 4$	$\| -4$
$-4x^2 = x^2 - 4x$	$\| +4x^2$
$0 = 5x^2 - 4x$	(Ausklammern)
$0 = x(5x-4)$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0,\ 5x - 4 = 0$	$\| +4$
$x = 0,\ 5x = 4$	$\| :5$
$x = 0,\ x = 0{,}8$	

An den Stellen x = 0 und x = 0,8 schneiden sich die Parabeln. Der Schnittpunkt $S_1(0|4)$ (für x=0) ist schon bekannt, die y-Koordinate des gesuchten zweiten Schnittpunkts P folgt aus:

$x = 0{,}8 \Rightarrow y = 0{,}8^2 - 4 \cdot 0{,}8 + 4 = 0{,}64 - 3{,}2 + 4 = 1{,}44$.

Der Schnittpunkt heißt damit: P(0,8|1,44).



www.michael-buhlmann.de / 04.2024 / Aufgabe 2043