Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Der Funktionsterm der nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel

$$p: y = x^2 - 2x - 5$$

soll in der Scheitelform dargestellt werden.

Lösung: I. Nach oben geöffnete, verschobene Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform) bzw. $y = (x-d)^2 + e$ (Scheitelform) mit den reellen Zahlen b, c, d, e und dem Scheitelpunkt S(d|e). Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung bzw. der 1. und 2. binomischen Formel:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = (x-d)^2 + e$$

mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

II. Es gilt:

Quadratische Ergänzung:

Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 - 2x - 5$ in der Normalform mit den Koeffizienten b = -2 und c = -5. Der Betrag des Koeffizienten b = -2 wird halbiert zu $|b|/2 = 1$ und der Ausdruck $(b/2)^2 = 1^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$y = x^2 - 2x - 5 = x^2 - 2x \underline{+ 1^2} - 5 \underline{- 1^2}$.

Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 2. binomischen Formel ($\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$, $\alpha=x$, $\beta=1$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$y = x^2 - 2x - 5 = \underline{x^2 - 2x + 1^2}\ \underline{- 5 - 1^2} = \underline{(x-1)^2}\ \underline{- 6}$.

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms $y = (x-1)^2 - 6$ mit den Koordinaten d = 1, e = -6 des Scheitelpunkts S(1|-6) und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$y = x^2 - 2x - 5 = (x-1)^2 - 6$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2024 / Aufgabe 2121