

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: Der Funktionsterm der nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel

$$p: y = x^2 + 6x + 11$$

soll in der Scheitelform dargestellt werden.

Lösung: I. Nach oben geöffnete, verschobene Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform) bzw. $y = (x-d)^2 + e$ (Scheitelform) mit den reellen Zahlen b, c, d, e und dem Scheitelpunkt $S(d|e)$. Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung bzw. der 1. und 2. binomischen Formel:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = (x-d)^2 + e$$

$$\text{mit: } d = -\frac{b}{2}, e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

II. Es gilt:

Quadratische Ergänzung:

Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 + 6x + 11$ in der Normalform mit den Koeffizienten $b = 6$ und $c = 11$. Der Betrag des Koeffizienten $b = 6$ wird halbiert zu $|b|/2 = 3$ und der Ausdruck $(b/2)^2 = 3^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$$y = x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + \underline{3^2} + 11 - \underline{3^2}.$$

Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 1. binomischen Formel ($\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$, $\alpha = x$, $\beta = 3$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$$y = x^2 + 6x + 11 = \underline{x^2 + 6x + 3^2} + \underline{11 - 3^2} = \underline{(x+3)^2} + \underline{2}.$$

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms $y = (x+3)^2 + 2$ mit den Koordinaten $d = -3$, $e = 2$ des Scheitelpunkts $S(-3|2)$ und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$$y = x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 + 2.$$