

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: Zeichne den Graphen der nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel

$$p: y = x^2 + 4x$$

in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

Lösung: I. Das Zeichnen einer Normalparabel im x-y-Koordinatensystem geschieht mit Hilfe des Scheitelpunkts, auch wenn die Parabelgleichung in der Normalform gegeben ist. Nach oben geöffnete, verschobene Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form: $y = x^2 + bx + c$ (Normalform) bzw. $y = (x-d)^2 + e$ (Scheitelform) mit den reellen Zahlen b, c, d, e und dem Scheitelpunkt $S(d|e)$. Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung bzw. der 1. und 2. binomischen Formel:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = (x-d)^2 + e$$

mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

II. Es gilt:

Quadratische Ergänzung:

Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 + 4x$ in der Normalform mit den Koeffizienten $b = 4$ und $c = 0$. Der Betrag des Koeffizienten $b = 4$ wird halbiert zu $|b|/2 = 2$ und der Ausdruck $(b/2)^2 = 2^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$$y = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2.$$

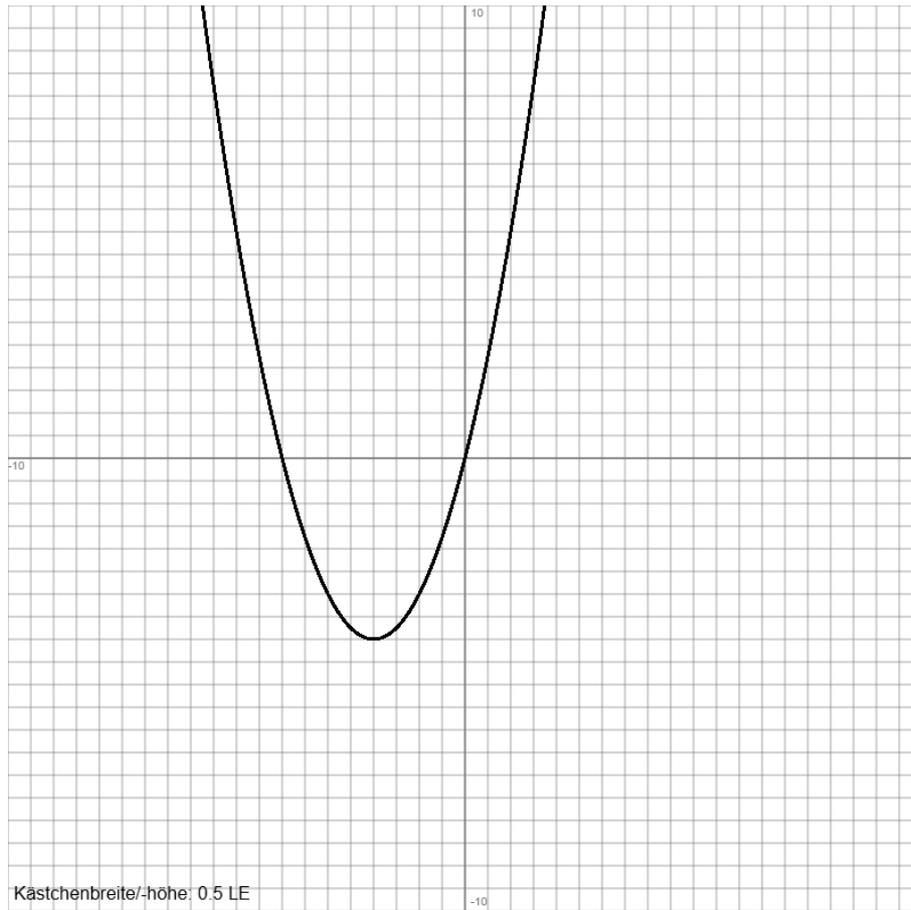
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 1. binomischen Formel ($\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$, $\alpha = x$, $\beta = 2$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$$y = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4.$$

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms $y = (x+2)^2 - 4$ mit den Koordinaten $d = -2$, $e = -4$ des Scheitelpunkts $S(-2|-4)$ und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$$y = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4.$$

III. Gemäß der errechneten Scheitelform der Parabel $p: y = (x+1.5)^2 - 6.25$ ergibt sich – wie gesehen – der Scheitelpunkt $S(-1,5|-6,25)$. Der Graph der nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel hat von daher das Aussehen:



www.michael-buhlmann.de / 06.2024 / Aufgabe 2125