Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel p: $y = x^2 + 6x + 3$ vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

Lösung: I. Es gilt für die Normalform einer Parabel p: $y = x^2 + bx + c$ und die Scheitelform p: $y = (x-d)^2 + e$ hinsichtlich der quadratischen Ergänzung und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ und dem Scheitelpunkt S(d|e).

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 + 6x + 3$ in der Normalform mit den Koeffizienten b = 6 und c = 3. Der Betrag des Koeffizienten b = 6 wird halbiert zu $\frac{|b|}{2} = 3$ und der Ausdruck $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 3^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$y = x^2 + 6x + 3 = x^2 + 6x \underline{+ 3^2} + 3 \underline{- 3^2}$.

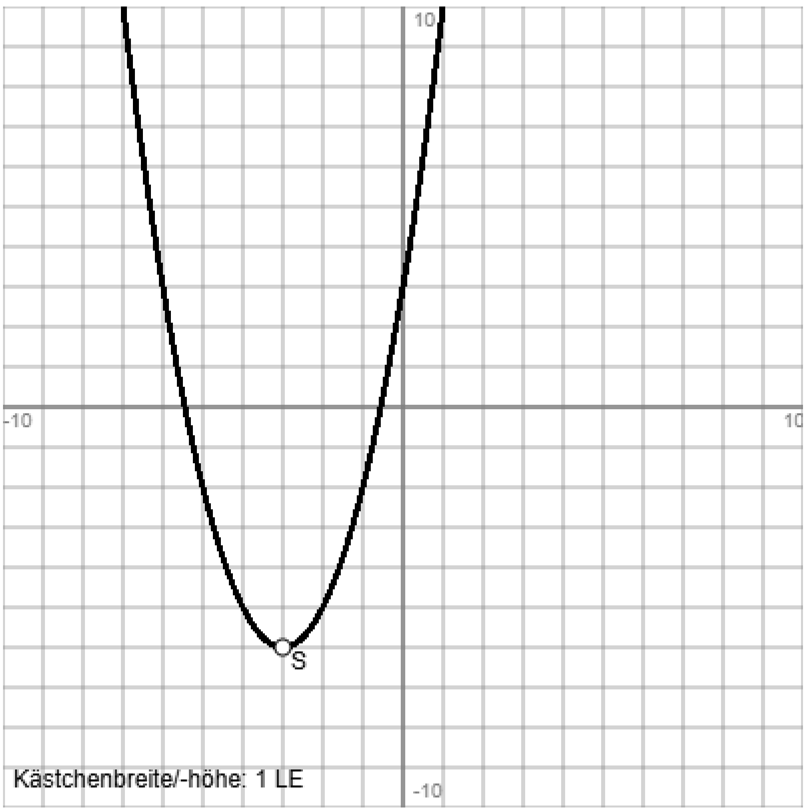
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 1. binomischen Formel ($\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2$, $\alpha=x$, $\beta=3$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$y = x^2 + 6x + 3 = \underline{x^2 + 6x + 3^2} + 3 - 3^2 = \underline{(x+3)^2} - 6$.

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms p: $y = (x+3)^2 - 6$ mit den Koordinaten d = -3, e = -6 des Scheitelpunkts S(-3|-6) und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$y = x^2 + 6x + 3 = (x+3)^2 - 6$.

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt S und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den Graphen der Normalparabel $y = x^2 + 6x + 3 = (x+3)^2 - 6$:



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt S(d|e) wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte P_1(d±1|e+1) finden sich im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte P_2(d±2|e+4) eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten P_1, die Parabelpunkte P_3(d±3|e+9) eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten P_2 usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt S enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt S angelegt wird.