Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel p: $y = x^2 - 10x + 17$ vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

Lösung: I. Es gilt für die Normalform einer Parabel p: $y = x^2 + bx + c$ und die Scheitelform p: $y = (x-d)^2 + e$ hinsichtlich der quadratischen Ergänzung und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x+\frac{b}{2})^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

$$\text{mit: } d = -\frac{b}{2},\ e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ und dem Scheitelpunkt } S(d|e).$$

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 - 10x + 17$ in der Normalform mit den Koeffizienten $b = -10$ und $c = 17$. Der Betrag des Koeffizienten $b = -10$ wird halbiert zu $\frac{|b|}{2} = 5$ und der Ausdruck $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 5^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$y = x^2 - 10x + 17 = x^2 - 10x + 5^2 + 17 - 5^2$.

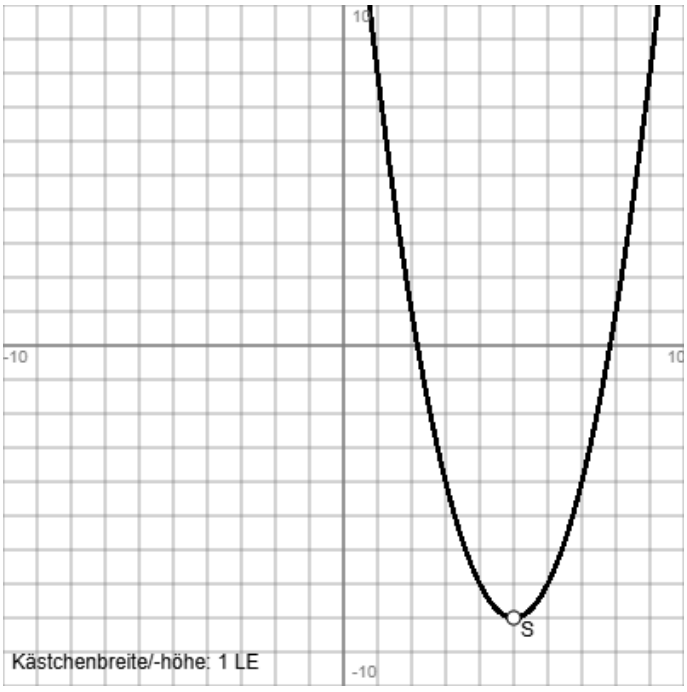
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 2. binomischen Formel ($\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$, $\alpha = x$, $\beta = 5$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$y = x^2 - 10x + 17 = x^2 - 10x + 5^2 + 17 - 5^2 = (x-5)^2 - 8$.

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms p: $y = (x-5)^2 - 8$ mit den Koordinaten $d = 5$, $e = -8$ des Scheitelpunkts $S(5|-8)$ und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$y = x^2 - 10x + 17 = (x-5)^2 - 8$.

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt S und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den Graphen der Normalparabel $y = x^2 - 10x + 17 = (x-5)^2 - 8$:



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt S(d|e) wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte $P_1(d\pm1|e+1)$ finden sich im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte $P_2(d\pm2|e+4)$ eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten P_1, die Parabelpunkte $P_3(d\pm3|e+9)$ eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten P_2 usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt S enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt S angelegt wird.