Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Punkte, Ebenen

Aufgabe: Bestimme, die fehlenden Koordinaten a, b, c der Punkte A(4|1|a) und B(b|0|b), C(c|c|-2) so, dass die Punkte auf der Ebene E mit:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

liegen.

Lösung: I. Wir setzen die zu den Punkten A, B, C gehörenden Ortsvektoren $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ statt $\vec{x}$ in die Parameterform der Ebenengleichung ein (Punktprobe) und erhalten jeweils ein lineares Gleichungssystem, mit dem die gesuchten Koordinaten a und b errechnet werden können.

II. Für den <u>Punkt A</u>(4|1|a) ergibt sich damit die folgende Vorgehensweise:

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Umformen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Big| -a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$+ 2r + 3s = 1$
$+ 1r + 2s = 1$
$+ 7r + 5s - 1a = -2$

<u>Anfangstableau</u>:

2 3 0 | 1
1 2 0 | 1
7 5 -1 | -2

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 7*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -2 & -11 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) + 11*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrl} + & 2r & + & 3s & & & = 1 \\ & & + & 1s & & & = 1 \\ & & & & - & 2a & = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a = 0$
$s = 1$
$r = -1$

Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar, die gesuchte Koordinate bestimmt sich als a = 0, so dass der Punkt A(4|1|0) auf der Ebene E liegt.

III. Entsprechend gilt für den Punkt B(b|0|b):

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Umformen:

$$b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mid -b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrl} + & 2r & + & 3s & - & 1b & = -3 \\ + & 1r & + & 2s & & & = 0 \\ + & 7r & + & 5s & - & 1b & = -2 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & -1 & -2 \end{array}$$

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 7*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & 17 \end{array}$$

2. Schritt: 1*(*3*) + 11*(*2*) /

2	3	-1	|	-3
0	1	1	|	3
0	0	16	|	50

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
+ & 2r & + & 3s & - & 1b & = -3 \\
 & & + & 1s & + & 1b & = 3 \\
 & & & & + & 16b & = 50
\end{array}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

b = 3.125
s = -0.125
r = 0.25

Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar, die gesuchte Koordinate bestimmt sich als b = 3,125, so dass der Punkt B(3,125|0|3,125) auf der Ebene E liegt.

IV. Für den Punkt C(c|c|-2) gilt:

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} c \\ c \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Umformen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad | -c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
+ & 2r & + & 3s & - & 1c & = -3 \\
+ & 1r & + & 2s & - & 1c & = 0 \\
+ & 7r & + & 5s & & & = -4
\end{array}
$$

Anfangstableau:

2	3	-1	|	-3
1	2	-1	|	0
7	5	0	|	-4

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 7*(*1*) /

2	3	-1	|	-3
0	1	-1	|	3
0	-11	7	|	13

2. Schritt: 1*(*3*) + 11*(*2*) /

2	3	-1	|	-3
0	1	-1	|	3
0	0	-4	|	46

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} +2r & +3s & -1c & = & -3 \\ & +1s & -1c & = & 3 \\ & & -4c & = & 46 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -11.5$
$s = -8.5$
$r = 5.5$

Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar, die gesuchte Koordinate bestimmt sich als c = -11,5, so dass der Punkt C(-11,5|-11,5|-2) auf der Ebene E liegt.

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 1000