Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Punkte, Ebenen

Aufgabe: Welche der Punkte A(2|6|-3), B(-7|0|13), C(-2|-7|8), D(13|16|-27) liegen auf der Ebene E mit:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} ?$$

1. Lösung: I. Wir setzen die zu den Punkten A, B, C, … gehörenden Ortsvektoren $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, … statt $\vec{x}$ in die Parameterform der Ebenengleichung ein (<u>Punktprobe</u>) und erhalten jeweils ein lineares Gleichungssystem, mit den Parametern der Ebene als Unbekannte. Führt das lineare Gleichungssystem mit Gauß-Verfahren und Tabellen auf eine eindeutige Lösung der Form:

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

so liegt der Punkt auf der Ebene; hierbei brauchen somit die Lösungsparameter nicht bestimmt zu werden. Hat das Endtableau im Gauß-Verfahren die Form:

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & * \end{array}\right),$$

so liegt der Punkt nicht auf der Ebene (*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0). Beim Gauß-Verfahren sind für die Punkte A, B, C, … im Übrigen immer dieselben Zeilenumformungen durchzuführen.

II. Für den <u>Punkt A</u>(2|6|-3) ergibt sich damit die folgende Vorgehensweise:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad | - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

- 2r + 1s = -1
- 1r + 2s = 1
+ 3r - 4s = -1

Anfangstableau:

r	s	R.S.
-2	1	-1
-1	2	1
3	-4	-1

1. Schritt: -2*(2) + 1*(1) / 2*(3) + 3*(1) /

-2	1	-1
0	-3	-3
0	-5	-5

2. Schritt: -3*(3) + 5*(2) /

-2	1	-1
0	-3	-3
0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

- 2r + 1s = -1
- 3s = -3
0 = 0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

(s = 1
r = 1)
-> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, der Punkt A(2|6|-3) liegt auf der Ebene E: AεE.

III. Entsprechendes gilt (hier auf das Endtableau verkürzt) für den Punkt B(-7|0|13):

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix}-7\\0\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-10\\-5\\15\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \quad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-5\\15\end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

- 2r + 1s = -10
- 1r + 2s = -5
+ 3r - 4s = 15

Anfangstableau:

r	s	R.S.
-2	1	-10
-1	2	-5
3	-4	15

1. Schritt: -2*(*2*) + 1*(*1*) / 2*(*3*) + 3*(*1*) /

-2 1 | -10
0 -3 | 0
0 -5 | 0

2. Schritt: -3*(*3*) + 5*(*2*) /

-2 1 | -10
0 -3 | 0
0 0 | 0

-> Endtableau -> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, der Punkt B(-7|0|13) liegt auf der Ebene E: BεE.

IV. Für den Punkt C(-2|-7|8) gilt:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad | - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

- 2*r* + 1*s* = -5
- 1*r* + 2*s* = -12
+ 3*r* - 4*s* = 10

Anfangstableau:

r *s* | *R.S.*
-2 1 | -5
-1 2 | -12
3 -4 | 10

1. Schritt: -2*(*2*) + 1*(*1*) / 2*(*3*) + 3*(*1*) /

-2 1 | -5
0 -3 | 19
0 -5 | 5

2. Schritt: -3*(*3*) + 5*(*2*) /

-2 1 | -5
0 -3 | 19
0 0 | 80

-> Endtableau -> keine Lösung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem ist nicht lösbar, der Punkt C(-2|-7|8) liegt nicht auf der Ebene E: C∉ E.

V. Für den Punkt D(13|16|-27) gilt:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix}13\\16\\-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \qquad |-\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10\\11\\-25\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{(Vertauschen)}$$

$$r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\11\\-25\end{pmatrix}$$

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

- 2*r* + 1*s* = 10
- 1*r* + 2*s* = 11
+ 3*r* - 4*s* = -25

<u>Anfangstableau</u>:

r	*s*	|	*R.S.*
-2	1	|	10
-1	2	|	11
3	-4	|	-25

<u>1. Schritt</u>: -2*(*2*) + 1*(*1*) / 2*(*3*) + 3*(*1*) /

-2	1	|	10
0	-3	|	-12
0	-5	|	-20

<u>2. Schritt</u>: -3*(*3*) + 5*(*2*) /

-2	1	|	10
0	-3	|	-12
0	0	|	0

-> Endtableau -> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, der Punkt D(13|16|-27) liegt auf der Ebene E: DεE.

2. Lösung: I. Wird eine Reihe von Punkten A, B, C, … dahingehend untersucht, ob sie auf einer Ebene E liegen, so empfiehlt sich eine eventuell vorliegende Parameterform der Ebene in eine Koordinatenform umzuwandeln. Die <u>Punktprobe</u>, d.h. das Einsetzen der Punktkoordinaten in die Koordinatenform der Ebene, ist dann recht einfach und führt sofort auf die gewünschte Aussage. Die <u>Umformung einer Ebenengleichung</u> von der Parameter- in die Koordinatenform geschieht mittels Kreuz- und Skalarprodukt:

E: $\vec{x}=\vec{p}+r\vec{v}+s\vec{w}$ (PF) -> $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$ (Normalenvektor) -> E: $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{p}$ (NF) ->

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$, d = $\vec{n}\cdot\vec{p}$ (KF).

II. Wir formen die <u>Ebenengleichung</u> von der Parameter- in die Koordinatenform um:

E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ (PF) -> $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ ->

E: $-2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -25$ -> E: $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25$ (KF).

III. Mit der Koordinatengleichung der Ebene E ergibt sich sofort durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die Ebenengleichung:

A(2|6|-3) -> Punktprobe -> $2\cdot 2+5\cdot 6+3\cdot(-3) = 4+30-9 = 25$ -> $A \in E$
B(-7|0|13) -> Punktprobe -> $2\cdot(-7)+5\cdot 0+3\cdot 13 = -14+39 = 25$ -> $B \in E$
C(-2|-7|8) -> Punktprobe -> $2\cdot(-2)+5\cdot(-7)+3\cdot 8 = -4-35+24 = -15 \neq 25$ -> $C \notin E$
D(13|16|-27) -> Punktprobe -> $2\cdot 13+5\cdot 16+3\cdot(-27) = 26+80-81 = 35$ -> $D \in E$.

Damit liegen die Punkte A, B, D auf der Ebene, der Punkt C nicht.

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1006