

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

## > Punkte, Geraden

---

**Aufgabe:** Welche der Punkte A(10|6|-2), B(-7|0|13), C(-6|-4|-2) liegen auf der Geraden g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

**Lösung:** I. Wir setzen die zu den Punkten A, B, C, ... gehörenden Ortsvektoren  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ , ... statt  $\vec{x}$  in die Parameterform der Geradengleichung ein (Punktprobe) und erhalten jeweils ein lineares Gleichungssystem, mit dem Parameter der Geraden g als Unbekannten. Alle drei entstandenen Gleichungen können entweder nach dem Parameter aufgelöst werden oder eine Gleichung nach dem Parameter und der Parameter in die übrigen Gleichungen eingesetzt werden; auch können Gleichungen auftreten, die den Parameter nicht enthalten. Führt die dargestellte Vorgehensweise für einen Punkt A, B, C, ... auf einen Widerspruch, so liegt der Punkt nicht auf der Geraden g; ergibt sich kein Widerspruch, so ist der Punkt Teil der Geraden g ( $\in$ : „Element von“;  $\notin$ : „nicht Element von“).

II. Für den Punkt A(10|6|-2) ergibt sich damit die folgende Vorgehensweise:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

(I)  $10 = 2 - 4t$

(II)  $6 = 4 - t$

(III)  $-2 = -2$

Lösen der Gleichung (I):

$$10 = 2 - 4t \Leftrightarrow 8 = -4t \Leftrightarrow t = -2$$

Lösen der Gleichung (II):

$$6 = 4 - t \Leftrightarrow 2 = -t \Leftrightarrow t = -2$$

Gleichung (III):

$$-2 = -2 \Rightarrow \text{kein Widerspruch}$$

Insgesamt gibt es keinen Widerspruch. Der Punkt A(10|6|-2) liegt auf der Geraden g:  $A \in g$ .

III. Für den Punkt B(-7|0|13) gilt die Vorgehensweise:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$(I) \quad -7 = 2 - 4t$$

$$(II) \quad 0 = 4 - t$$

$$(III) \quad 13 = -2,$$

so dass wegen Gleichung (III) sofort ein Widerspruch folgt. Der Punkt  $B(-7|0|13)$  liegt damit nicht auf der Geraden:  $B \notin g$ .

IV. Für den Punkt C $(-6|-4|-2)$  folgt:

Einsetzen, Umformen:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$(I) \quad -6 = 2 - 4t$$

$$(II) \quad -4 = 4 - t$$

$$(III) \quad -2 = -2$$

Lösen der Gleichung (I):

$$-6 = 2 - 4t \Leftrightarrow -8 = -4t \Leftrightarrow t = 2$$

Einsetzen von  $t = 2$  in die Gleichung (II):

$$-4 = 4 - 2 \Leftrightarrow -4 = 2 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Wegen des Widerspruchs liegt der Punkt  $C(-6|-4|-2)$  nicht auf der Geraden  $g$ :  $C \notin g$ .

V. Wir skizzieren noch die Lagebeziehungen zwischen Punkten und Gerade:

