

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Polynomdivision

Aufgabe: Führe die Polynomdivision

$$(x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x - 2)$$

durch.

1. Lösung: I. Bei einer Polynomdivision (vorzugsweise) mit einem Linearfaktor als Teiler gilt unter der Voraussetzung der Teilbarkeit (ohne Rest) die Termumformung:

$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (ax - x_0) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$
(a, a_0, \dots, a_n reell; $a, a_n \neq 0$), wobei sich die Zahlen $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ nacheinander gemäß dem folgenden Algorithmus ergeben:

Algorithmus zur Polynomdivision

- 1) Durch Division von a_n durch a wird $b_{n-1} = a_n/a$ berechnet.
- 2) Durch Multiplikation des Teilers $(ax - x_0)$ mit $b_{n-1} x^{n-1}$ entsteht der Term $b_{n-1} a x^n - b_{n-1} x_0 x^{n-1}$.
- 3) Vom Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ wird der Term $b_{n-1} a x^n - b_{n-1} x_0 x^{n-1}$ abgezogen.
- 4) Mit dem durch Subtraktion erhaltenen neuen Polynom $a'_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ bei $a'_{n-1} = a_{n-1} - b_{n-1} x_0$ werden die Schritte 1) bis 3) u.a. mit der Bestimmung von b_{n-2} wiederholt.
- 5) Das Verfahren endet, wenn die Subtraktion in Schritt 3) den Rest 0 ergibt.

II. Es gilt die Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x - 2) = x^2 - 3x - 3 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \quad -3x^2 + 3x \\ \quad \underline{-(-3x^2 + 6x)} \\ \qquad -3x + 6 \\ \qquad \underline{-(-3x + 6)} \\ \qquad \qquad 0 \end{array}$$

2. Lösung: I. Eine Polynomdivision lässt sich mit dem Horner Schema durchführen. Ist die Polynomdivision vom Typ

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (x - x_0)$$

(a_0, \dots, a_n reell; $a_n \neq 0$), so gilt das

Horner Schema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
		$x_0 b_{n-1}$	$x_0 b_{n-2}$		$x_0 b_1$	$x_0 b_0$
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0 b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0 a_n$	$b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0 b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0 a_{n-1} + x_0^2 a_n$	b_1	$b_0 =$ $a_1 + x_0 b_1 =$ $a_1 + x_0 a_2 + x_0^2 a_3$ $+ \dots + x_0^{n-1} a_n$	$r_0 =$ $a_0 + x_0 b_0 =$ $a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2$ $+ \dots + x_0^n a_n$

mit den Koeffizienten des Polynoms a_0, a_1, \dots, a_n , der Stelle x_0 , $r_0 = f(x_0)$ als Rest und im Fall $r_0 = 0$ den Zahlen b_0, b_1, \dots, b_{n-1} als Koeffizienten des reduzierten Polynoms $f_1(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$.

Im Horner-Schema wird also wie folgt gerechnet:

- I. Die Spalte j des Schemas ($j=0, \dots, n$) enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms $f(x)$.
- II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
- III. In der Spalte j des Schemas ($j=1, \dots, n$) errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j} .

und damit das Ergebnis der Polynomdivision:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (x - x_0) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

II. Es ergibt sich das Horner Schema zur Polynomdivision für das Polynom $x^3 - 5x^2 + 3x + 6$ (mit den Koeffizienten 1, -5, 3, 6) und die Stelle $x_0 = 2$:

	1	-5	3	6
		2 1 = 2	2 (-3) = -6	2 (-3) = -6
2	1	-5 + 2 = -3	3 - 6 = -3	6 - 6 = 0

Die eingerahmten Werte (1, -3, -3) sind die Koeffizienten des durch das Teilen entstandenen Polynoms $x^2 - 3x - 3$; es gilt also:

$$(x^3 - 5x^2 + 3x + 6) : (x - 2) = x^2 - 3x - 3.$$