Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Polynomdivision

Aufgabe: Führe die Polynomdivision

$$(x^3–5x^2+3x+6):(x–2)$$

durch.

1. Lösung: I. Bei einer Polynomdivision (vorzugsweise) mit einem Linearfaktor als Teiler gilt unter der Voraussetzung der Teilbarkeit (ohne Rest) die Termumformung:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(ax–x_0) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$$

(a, a_0, … a_n reell; a, $a_n \neq 0$), wobei sich die Zahlen b_{n-1}, b_{n-2}, … b_0 nacheinander gemäß dem folgenden Algorithmus ergeben:

Algorithmus zur Polynomdivision

1) Durch Division von a_n durch a wird $b_{n-1} = a_n/a$ berechnet.
2) Durch Multiplikation des Teilers $(ax–x_0)$ mit $b_{n-1}x^{n-1}$ entsteht der Term $b_{n-1}ax^n–b_{n-1}x_0x^{n-1}$.
3) Vom Polynom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ wird der Term $b_{n-1}ax^n–b_{n-1}x_0x^{n-1}$ abgezogen.
4) Mit dem durch Subtraktion erhaltenen neuen Polynom $a'_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ bei $a'_{n-1} = a_{n-1}–b_{n-1}x_0$ werden die Schritte 1) bis 3) u.a. mit der Bestimmung von b_{n-2} wiederholt.
5) Das Verfahren endet, wenn die Subtraktion in Schritt 3) den Rest 0 ergibt.

II. Es gilt die Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-5x^2+3x+6):(x-2) = x^2-3x-3 \\
\underline{-(x^3-2x^2)} \\
\quad -3x^2+3x \\
\quad \underline{-(-3x^2+6x)} \\
\qquad\quad -3x+6 \\
\qquad\quad \underline{-(-3x+6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2. Lösung: I. Eine Polynomdivision lässt sich mit dem <u>Hornerschema</u> durchführen. Ist die Polynomdivision vom Typ

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(x-x_0)$$

($a_0, \ldots a_n$ reell; $a_n \neq 0$), so gilt das

Hornerschema

	a_n	a_{n-1} x_0b_{n-1}	a_{n-2} x_0b_{n-2}	…	a_1 x_0b_1	a_0 x_0b_0
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0a_n$	$b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0a_{n-1} + x_0^2a_n$	b_1	$b_0 =$ $a_1 + x_0b_1 =$ $a_1 + x_0a_2 + x_0^2a_3$ $+ \ldots + x_0^{n-1}a_n$	$r_0 =$ $a_0 + x_0b_0 =$ $a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2$ $+ \ldots + x_0^na_n$

mit den Koeffizienten des Polynoms $a_0, a_1, \ldots a_n$, der Stelle x_0, $r_0 = f(x_0)$ als Rest und im Fall $r_0 = 0$ den Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ als Koeffizienten des reduzierten Polynoms $f_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$.
Im Horner-Schema wird also wie folgt <u>gerechnet</u>:

I. Die Spalte j des Schemas (j=0,…n) enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms f(x).
II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
III. In der Spalte j des Schemas (j=1,…n) errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j}.

und damit das Ergebnis der Polynomdivision:

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(x-x_0) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0.$$

II. Es ergibt sich das Hornerschema zur <u>Polynomdivision</u> für das Polynom x^3-5x^2+3x+6 (mit den Koeffizienten 1, -5, 3, 6) und die Stelle $x_0 = 2$:

	1	-5 2 1·= 2	3 2 (-3)·= -6	6 2 (-3) = -6
2	$\boxed{1}$	-5 + 2 = $\boxed{-3}$	3 – 6 = $\boxed{-3}$	6 – 6 = 0

Die eingerahmten Werte (1, -3, -3) sind die Koeffizienten des durch das Teilen entstandenen Polynoms x^2-3x-3; es gilt also:
$(x^3-5x^2+3x+6):(x-2) = x^2-3x-3$.

www.michael-buhlmann.de / 03.2017 / Aufgabe 330