Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Polynomfunktionen/Hornerschema

Aufgabe: Erstelle mit Hilfe des Hornerschemas eine Wertetabelle für die Polynomfunktion

$$f(x) = 2x^3 – 5x^2 + 12$$

für das Intervall [-5; 5] (Schrittweite 0,5).

Lösung: I. Zur Berechnung von Funktionswerten von Polynomfunktionen

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + … + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

für bestimmte x-Werte x_0 ist das Hornerschema anzuwenden:

Hornerschema

	a_n	a_{n-1} x_0b_{n-1}	a_{n-2} x_0b_{n-2}	…	a_1 x_0b_1	a_0 x_0b_0
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0a_n$	$b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0a_{n-1} + x_0^2a_n$	b_1	$b_0 =$ $a_1 + x_0b_1 =$ $a_1 + x_0a_2 + x_0^2a_3$ $+ … + x_0^{n-1}a_n$	$r_0 =$ $a_0 + x_0b_0 =$ $a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2$ $+ … + x_0^na_n$

mit den Koeffizienten des Polynoms $a_0, a_1, … a_n$, der Stelle x_0, $r_0 = f(x_0)$ als gesuchter Funktionswert.
Im Horner-Schema wird also wie folgt gerechnet:
I. Die Spalte j des Schemas (j=0,…n) enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms f(x).
II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
III. In der Spalte j des Schemas (j=1,…n) errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j}.

II. Wir rechnen und erhalten als Wertetabelle:

Auswertung (Hornerschema):

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		-10	+75	-375
$x_0 = -5$	2	-15	75	-363
			f(-5) =	-363
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		-9	+63	-283.5
$x_0 = -4.5$	2	-14	63	-271.5
			f(-4.5) =	-271.5
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		-8	+52	-208
$x_0 = -4$	2	-13	52	-196
			f(-4) =	-196

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-7	+42	-147
$x_0 = -3.5$		2	-12	42	-135
				f(-3.5) =	-135
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-6	+33	-99
$x_0 = -3$		2	-11	33	-87
				f(-3) =	-87
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-5	+25	-62.5
$x_0 = -2.5$		2	-10	25	-50.5
				f(-2.5) =	-50.5
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-4	+18	-36
$x_0 = -2$		2	-9	18	-24
				f(-2) =	-24
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-3	+12	-18
$x_0 = -1.5$		2	-8	12	-6
				f(-1.5) =	-6
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-2	+7	-7
$x_0 = -1$		2	-7	7	5
				f(-1) =	5
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			-1	+3	-1.5
$x_0 = -0.5$		2	-6	3	10.5
				f(-0.5) =	10.5
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			+0	+0	+0
$x_0 = 0$		2	-5	0	12
				f(0) =	12
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			+1	-2	-1
$x_0 = 0.5$		2	-4	-2	11
				f(0.5) =	11
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			+2	-3	-3
$x_0 = 1$		2	-3	-3	9
				f(1) =	9
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->		2	-5	0	12
			+3	-3	-4.5
$x_0 = 1.5$		2	-2	-3	7.5
				f(1.5) =	7.5

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+4	-2	-4
$x_0 = 2$	2	-1	-2	8
			f(2) =	8
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+5	+0	+0
$x_0 = 2.5$	2	0	0	12
			f(2.5) =	12
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+6	+3	+9
$x_0 = 3$	2	1	3	21
			f(3) =	21
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+7	+7	+24.5
$x_0 = 3.5$	2	2	7	36.5
			f(3.5) =	36.5
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+8	+12	+48
$x_0 = 4$	2	3	12	60
			f(4) =	60
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+9	+18	+81
$x_0 = 4.5$	2	4	18	93
			f(4.5) =	93
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12$ ->	2	-5	0	12
		+10	+25	+125
$x_0 = 5$	2	5	25	137
			f(5) =	137

Wertetabelle:

x	-5	-4.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-363	-271.5	-196	-135	-87	-50.5	-24	-6	5	10.5	12	11	9	7.5	8	12	21	36.5	60	93	137

www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2088