

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Bestimme alle Nullstellen der ganz rationalen Funktion:

$$f(x) = 2x^3 - x^4.$$

Lösung: I. Allgemein errechnen sich für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades mit:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die Nullstellen durch Auflösen der Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (*)$$

nach der Variablen x (n als natürliche Zahl oder 0, reelle Zahlen a_0, \dots, a_n). Dies kann geschehen durch Ausklammern (und Polynomdivision), durch Substitution und nicht zuletzt vermöge der Formeln für lineare und quadratische Gleichungen, also durch:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

(lineare Gleichung, $a \neq 0$)

und:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, c = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$a = 1, b = p, c = q$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} < 0$), 1 Lösung (bei $c=0$), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} > 0$)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (abc-Formel): $D = b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$)	Gemischt quadratische Gleichung (pq-Formel): $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$)

(quadratische Gleichung)

Biquadratische Gleichungen werden auf Grund der Substitution $z = x^2$ auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: $x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$, falls definiert. Für bikubische Gleichungen gilt dasselbe vermöge der Substitution $z = x^3$:

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: $x = \sqrt[3]{z_1}$, $x = \sqrt[3]{z_2}$. Enthält jeder Summand der ganz rationalen Funktion eine Potenz von x , wobei x^k die kleinste Potenz sei (k als natürliche Zahl), so lässt sich Letztere auf Grund von:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k = x^k (a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \dots + a_k) = 0$$

in der Gleichung (*) ausklammern, so dass der Satz vom Nullprodukt greift und die zwei Gleichungen:

$$x^k = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \dots + a_k = 0$$

gelten. Hat die ganz rationale Funktion die Form eines Produktes, so dass etwa die Gleichung:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \cdot \dots = 0 \quad (**)$$

gültig ist, so ist ebenfalls für (**) der Satz vom Nullprodukt anzuwenden und jeder der Faktoren gleich 0 zu setzen. Auftreten können auch Potenzgleichungen vom Typ

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x^n = a \Rightarrow x = (\pm) \sqrt[n]{a}$$

(n ungerade bzw. gerade),

die durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen sind.

II. Wir setzen zur Bestimmung der Nullstellen die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^4 = 0$ und erhalten die (umzuformende) Gleichung:

$$2x^3 - x^4 = 0 \quad \text{(Ausklammern)}$$

$$x^3(2-x) = 0 \quad \text{(Satz vom Nullprodukt)}$$

$$x^3 = 0, 2-x = 0,$$

so dass sich zwei einfache Gleichungen (Potenzgleichung, lineare Gleichung) ergeben:

$$x^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = 0$$

und:

$$2-x = 0 \quad | +x$$

$$2 = x.$$

Mit $x = 0$ und $x = 2$ haben wir die beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^4$ erhalten, also: $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$.

