Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Bestimme alle Nullstellen der ganz rationalen Funktion:

$$f(x) = 2x^3 - x^4 .$$

Lösung: I. Allgemein errechnen sich für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades mit:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die Nullstellen durch Auflösen der Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (*)$$

nach der Variablen x (n als natürliche Zahl oder 0, reelle Zahlen a_0, … a_n). Dies kann geschehen durch Ausklammern (und Polynomdivision), durch Substitution und nicht zuletzt vermöge der Formeln für lineare und quadratische Gleichungen, also durch:

$$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{a}$$

(lineare Gleichung, a≠0)

und:

$ax^2 + bx + c = 0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (abc-Formel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (pq-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

(quadratische Gleichung)

Biquadratische Gleichungen werden auf Grund der Substitution $z = x^2$ auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: $x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$, falls definiert. Für bikubische Gleichungen gilt dasselbe vermöge der Substitution $z = x^3$:

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: x = $\sqrt[3]{z_1}$, x = $\sqrt[3]{z_2}$. Enthält jeder Summand der ganz rationalen Funktion eine Potenz von x, wobei x^k die kleinste Potenz sei (k als natürliche Zahl), so lässt sich Letztere auf Grund von:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k = x^k (a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \ldots + a_k) = 0$$

in der Gleichung (*) ausklammern, so dass der Satz vom Nullprodukt greift und die zwei Gleichungen:

$$x^k = 0 \;\Rightarrow x = 0$$
$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \ldots + a_k = 0$$

gelten. Hat die ganz rationale Funktion die Form eines Produktes, so dass etwa die Gleichung:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \cdot \ldots = 0 \quad (**)$$

gültig ist, so ist ebenfalls für (**) der Satz vom Nullprodukt anzuwenden und jeder der Faktoren gleich 0 zu setzen. Auftreten können auch Potenzgleichungen vom Typ

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x^n = a \Rightarrow x = (\pm)\sqrt[n]{a}$$

(n ungerade bzw. gerade),

die durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen sind.

II. Wir setzen zur <u>Bestimmung der Nullstellen</u> die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^4 = 0$ und erhalten die (umzuformende) Gleichung:

$2x^3 - x^4 = 0$	(Ausklammern)
$x^3(2-x) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x^3 = 0$, $2-x = 0$,	

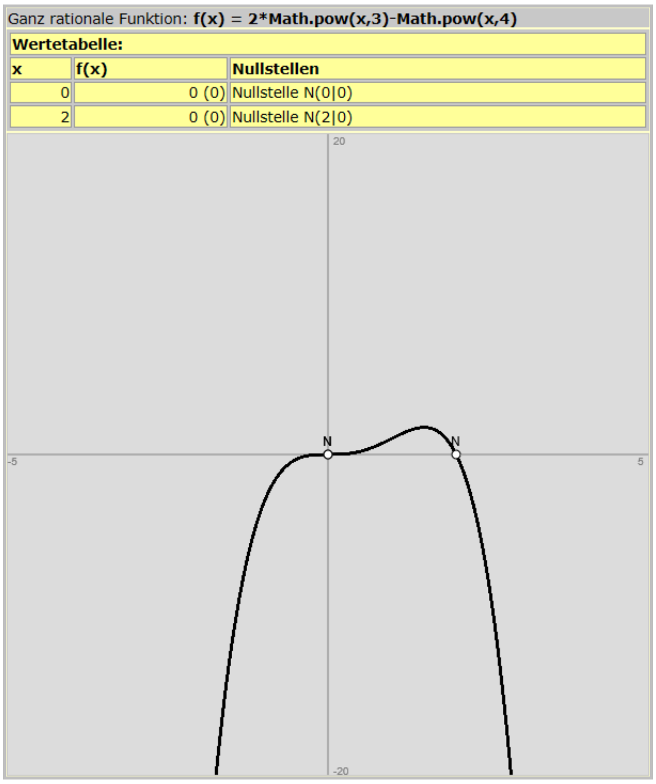
so dass sich zwei einfache Gleichungen (Potenzgleichung, lineare Gleichung) ergeben:

$x^3 = 0$	$\mid \sqrt[3]{\ }$
$x = 0$	

und:

$2-x = 0$	$\mid +x$
$2 = x$.	

Mit x = 0 und x = 2 haben wir die beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^4$ erhalten, also: $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$.



www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 287