Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Bestimme alle Nullstellen der ganz rationalen Funktion:

$$f(x) = 0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x\,.$$

1. Lösung: I. Allgemein errechnen sich für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades mit:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die Nullstellen durch Auflösen der Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (*)$$

nach der Variablen x (n als natürliche Zahl oder 0, reelle Zahlen a_0, … a_n). Dies kann geschehen durch Ausklammern (und Polynomdivision), durch Substitution und nicht zuletzt vermöge der Formeln für lineare und quadratische Gleichungen, also durch:

$$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{a}$$

(lineare Gleichung, a≠0)

und:

$ax^2 + bx + c = 0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (abc-Formel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (pq-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

(quadratische Gleichung)

Biquadratische Gleichungen werden auf Grund der Substitution z = x^2 auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: $x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$, falls definiert. Für bikubische Gleichungen gilt dasselbe vermöge der Substitution z = x^3:

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: $x = \sqrt[3]{z_1}$, $x = \sqrt[3]{z_2}$. Enthält jeder Summand der ganz rationalen Funktion eine Potenz von x, wobei x^k die kleinste Potenz sei (k als natürliche Zahl), so lässt sich Letztere auf Grund von:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_k x^k = x^k (a_n x^{n-k} + a_{n-1}x^{n-1-k} + ... + a_k) = 0$$

in der Gleichung (*) ausklammern, so dass der Satz vom Nullprodukt greift und die zwei Gleichungen:

$$x^k = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$a_n x^{n-k} + a_{n-1}x^{n-1-k} + ... + a_k = 0$$

gelten. Hat die ganz rationale Funktion die Form eines Produktes, so dass etwa die Gleichung:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \cdot ... = 0 \quad (**)$$

gültig ist, so ist ebenfalls für (**) der Satz vom Nullprodukt anzuwenden und jeder der Faktoren gleich 0 zu setzen. Auftreten können auch Potenzgleichungen vom Typ

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x^n = a \Rightarrow x = (\pm)\sqrt[n]{a}$$

(n ungerade bzw. gerade),

die durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen sind.

II. Wir setzen zur Bestimmung der Nullstellen die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x = 0$ und erhalten die (umzuformende) Gleichung:

$0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x = 0$ (Ausklammern)
$x(0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$x = 0$, $0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4 = 0$,

so dass sich die Lösung x=0 und eine quadratische Gleichung ergeben. Letztere lösen wir wie folgt nach der abc-Formel:

$0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4 = 0$ (abc-Formel: a=0,5, b=3,5, c=-4)

$$x_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0{,}5}$$
$$x_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 8}}{1}$$
$$x_{1,2} = -3{,}5 \pm \sqrt{20{,}25}$$
$$x_{1,2} = -3{,}5 \pm 4{,}5$$

$x_1 = -3{,}5+4{,}5 = 1$, $x_2 = -3{,}5-4{,}5 = -8$.

Mit x = -8, x = 0 und x = 1 haben wir die drei Nullstellen der ganz rationalen (Polynom-) Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x$ erhalten, also: $N_1(-8|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(1|0)$.

2. Lösung: I. Allgemein errechnen sich für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades mit:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die Nullstellen durch Auflösen der Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (*)$$

nach der Variablen x (n als natürliche Zahl oder 0). Dies kann geschehen durch Ausklammern (und Polynomdivision), durch Substitution und nicht zuletzt vermöge der Formeln für lineare und quadratische Gleichungen, also durch:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

(lineare Gleichung, a≠0)

und:

$ax^2+bx+c=0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\frac{c}{a}$ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x=0\vee ax+b=0$ $x=0\vee ax=-b$ $x=0\vee x=-\frac{b}{a}$	$ax^2+bx+c=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x^2+px+q=0$ $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (abc-Formel): D = b^2-4ac als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (pq-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

(quadratische Gleichung)

Biquadratische Gleichungen werden auf Grund der Substitution z = x^2 auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: x = $\pm\sqrt{z_1}$, x = $\pm\sqrt{z_2}$, falls definiert. Für bikubische Gleichungen gilt dasselbe vermöge der Substitution z = x^3:

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

mit Lösungen: x = $\sqrt[3]{z_1}$, x = $\sqrt[3]{z_2}$. Enthält jeder Summand der ganz rationalen Funktion eine Potenz von x, wobei x^k die kleinste Potenz sei (k als natürliche Zahl), so lässt sich Letztere auf Grund von:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_kx^k=x^k(a_nx^{n-k}+a_{n-1}x^{n-1-k}+...+a_k)=0$$

in der Gleichung (*) ausklammern, so dass der Satz vom Nullprodukt greift und die zwei Gleichungen:

$$x^k=0 \Rightarrow x = 0$$
$$a_nx^{n-k}+a_{n-1}x^{n-1-k}+...+a_k=0$$

gelten. Hat die ganz rationale Funktion die Form eines Produktes, so dass etwa die Gleichung:

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot...\cdot(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\cdot...=0 \quad (**)$$

gültig ist, so ist ebenfalls für (**) der Satz vom Nullprodukt anzuwenden und jeder der Faktoren gleich 0 zu setzen. Auftreten können auch Potenzgleichungen vom Typ

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x^n = a \Rightarrow x=(\pm)\sqrt[n]{a}$$

(n ungerade bzw. gerade),

die durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen sind.

II. Wir setzen zur <u>Bestimmung der Nullstellen</u> die Funktion $f(x)=0{,}5x^3+3{,}5x^2-4x=0$ und erhalten die (umzuformende) Gleichung:

$0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x = 0$	(Ausklammern)
$x(0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4) = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$x = 0$, $0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4 = 0$,	

so dass sich die Lösung x=0 und eine quadratische Gleichung ergeben. Letztere lösen wir wie folgt nach der pq-Formel:

$0{,}5x^2 + 3{,}5x - 4 = 0$	| :0,5
$x^2 + 7x - 8 = 0$	(pq-Formel: p=7, q=-8)

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-8)}$$

$$x_{1,2} = -3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 8}$$

$$x_{1,2} = -3{,}5 \pm \sqrt{20{,}25}$$

$$x_{1,2} = -3{,}5 \pm 4{,}5$$

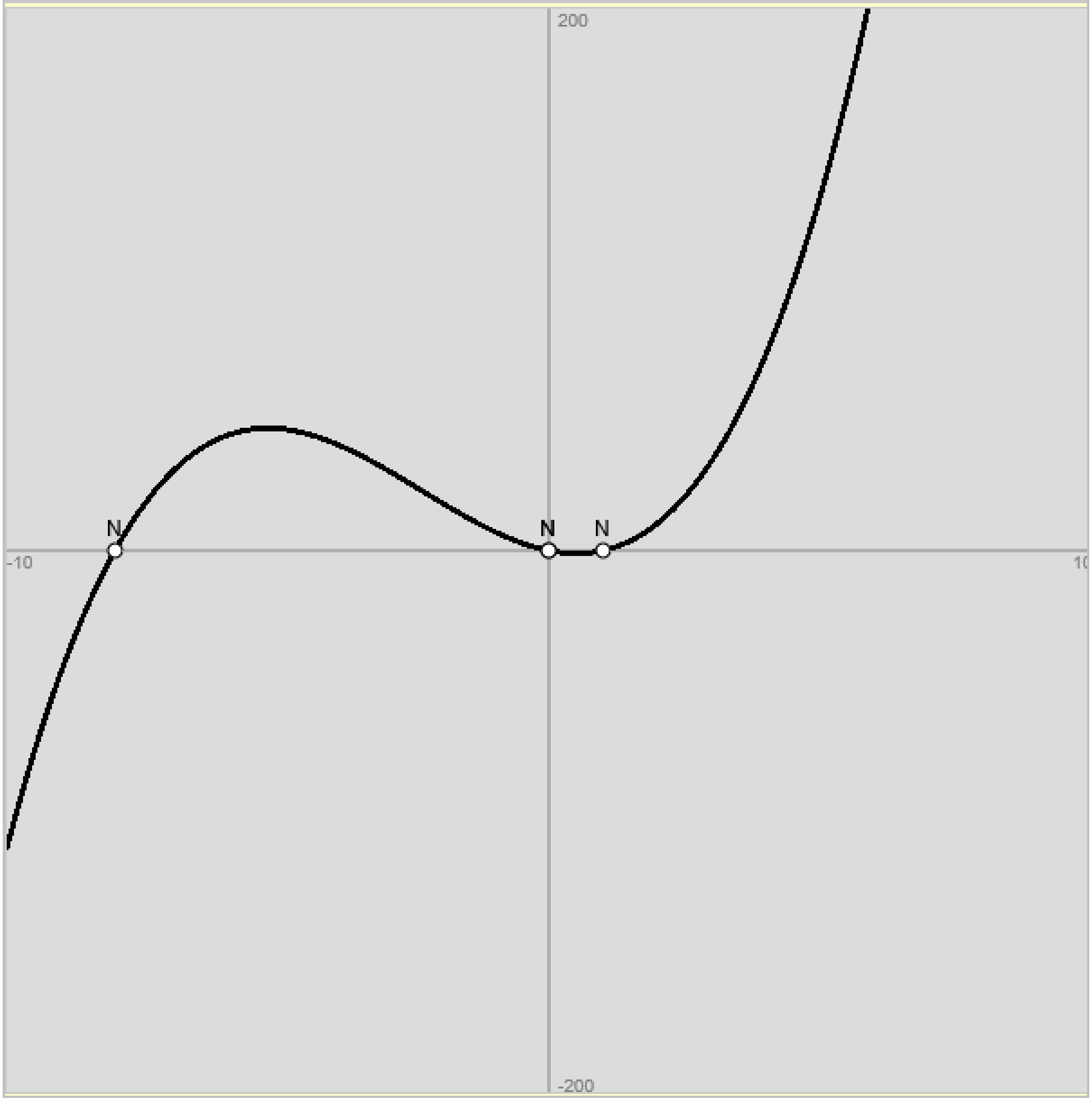
$x_1 = -3{,}5+4{,}5 = 1$, $x_2 = -3{,}5–4{,}5 = -8$.

Mit x = -8, x = 0 und x = 1 haben wir die drei Nullstellen der ganz rationalen (Polynom-) Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 3{,}5x^2 - 4x$ erhalten, also: $N_1(-8|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(1|0)$.

Ganz rationale Funktion: **f(x) = 0.5*Math.pow(x,3)+3.5*Math.pow(x,2)-4*x**

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Nullstellen**
-8	0 (0)	Nullstelle N(-8|0)
0	0 (0)	Nullstelle N(0|0)
1	0 (0)	Nullstelle N(1|0)



www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 288