Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Untersuche die ganz rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 40$$

auf Symmetrie.

1. Lösung: I. Wir gehen hier aus von der Symmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems (Punktsymmetrie) bzw. zur y-Achse des Koordinatensystems (Achsensymmetrie) und haben: Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0, wenn

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

gilt. Sie heißt punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

gilt. Weiter folgt für ganz rationale Funktionen (Polynome), also für Funktionen vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(n als natürliche Zahl oder 0, reelle Zahlen a_0, … a_n):

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0).
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie zum Koordinatenursprung O(0|0) oder zur y-Achse x = 0 gegeben.

II. Bei der Untersuchung auf Symmetrie der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 40$ gehen wir vom Term f(-x) aus und erhalten nach entsprechenden Termumformungen:

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 3(-x)^2 - 40 = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 40$$

wegen: $(-x)^n = x^n$ für gerades n und : $(-x)^n = -x^n$ für ungerades n. Es gilt somit:

f(-x) = f(x),

woraus die (Achsen-) Symmetrie der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 40$ zur y-Achse folgt.

2. Lösung: I. Wir gehen hier aus von der Symmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems (Punktsymmetrie) bzw. zur y-Achse des Koordinatensystems (Achsensymmetrie) und haben: Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0, wenn

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

gilt. Sie heißt punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

gilt. Weiter folgt für ganz rationale Funktionen (Polynome), also für Funktionen vom Typ:

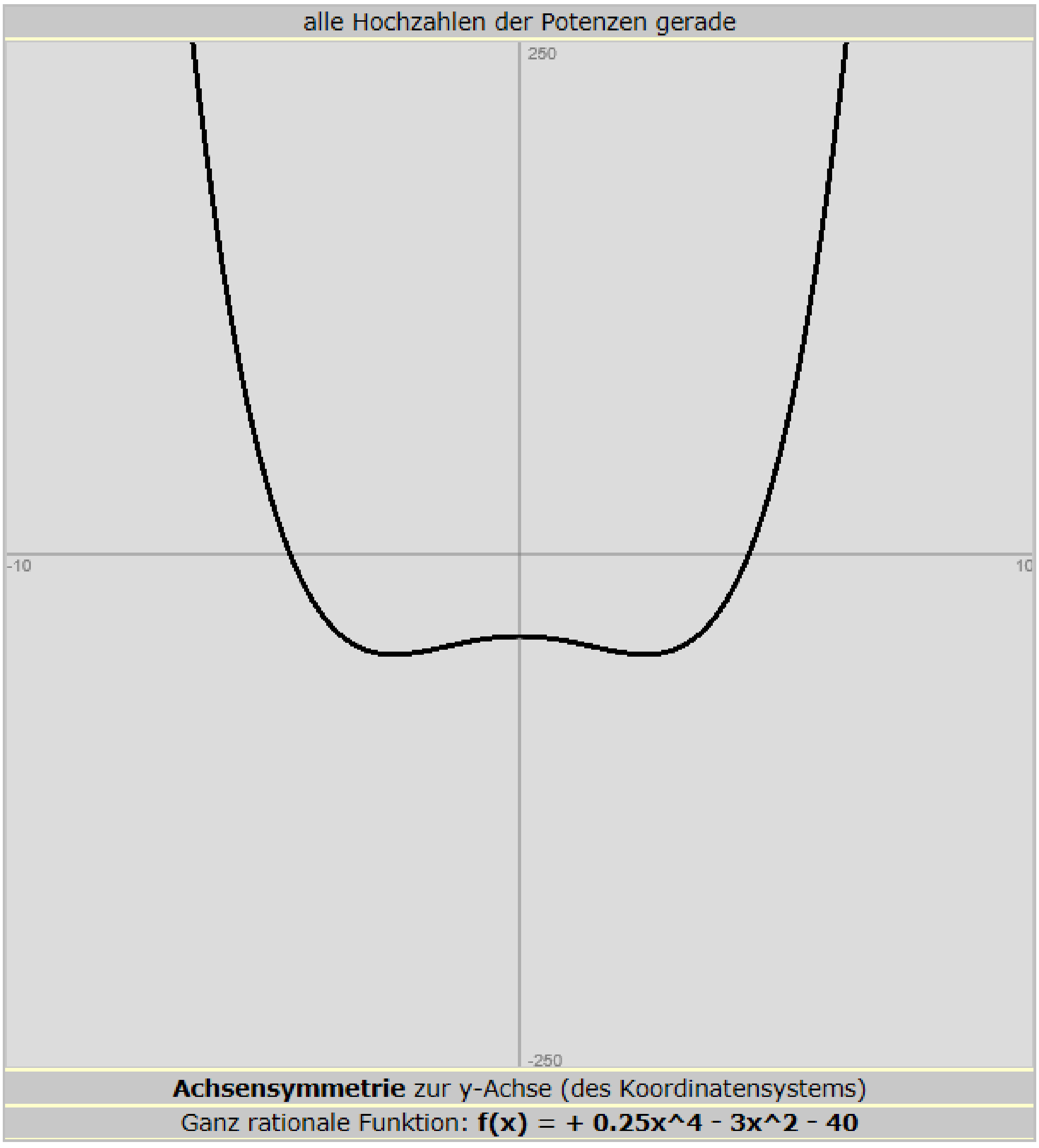
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(n als natürliche Zahl oder 0, reelle Zahlen a_0, … a_n):

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0).
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie zum Koordinatenursprung O(0|0) oder zur y-Achse gegeben.

II. Bei der Untersuchung auf Symmetrie der Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2-40$ gehen wir vom Funktionsterm aus und haben in den Potenzausdrücken $\frac{1}{4}x^4$, $-3x^2$, $-40=-40x^0$ nur Potenzen mit gerader Hochzahl. Daher ist die ganz rationale Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2-40$ zur y-Achse achsensymmetrisch.

III. Der nachstehende Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2-40$ verdeutlicht die Achsensymmetrie der ganz rationalen Zuordnung:



www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 290