Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Zerlege die ganz rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

in Linearfaktoren.

Lösung: I. Wir bemerken allgemein zur Linearfaktorzerlegung von ganz rationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

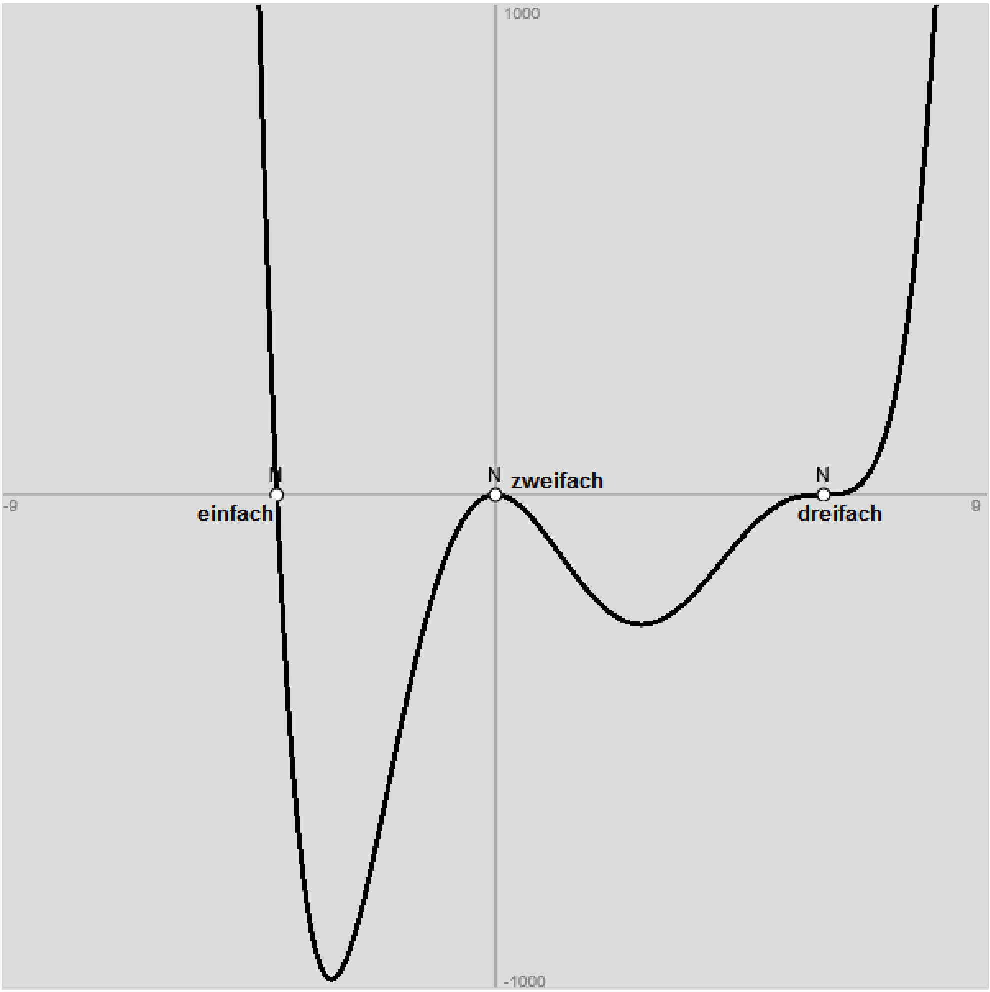
mit Grad n bei reellen Koeffizienten und ganzzahlig-nichtnegativen Exponenten das Folgende: Lassen sich zur Funktion f(x) k Nullstellen x_i mit $f(x_i) = 0$ und den Vielfachheiten n_i, $1 \leq i \leq k$, finden, so dass:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 1$$

gilt, so lässt der ganz rationale Ausdruck umformen zu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{n_k},$$

d.h. es gilt die Zerlegung der Funktion f(x) in Linearfaktoren. Die Vielfachheit n_i einer Nullstelle x_i mit $f(x_i) = 0$ bestimmt sich, wenn etwa die Polynomdivision $f(x) : (x - x_i)^{n_i}$ ohne Rest möglich ist oder wenn für die Ableitungen an der Stelle x_i gilt: $f'(x_i) = ... = f^{(n_i - 1)}(x) = 0$, $f^{(n_i)}(x) \neq 0$, $1 \leq i \leq k$.



Zur Bestimmung der Nullstellen von ganz rationalen Funktionen ist die Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zu lösen, wobei Lösungsmethoden wie Polynomdivision, Ausklammern, Substitution, abc- oder pq-Formel für quadratische Ausdrücke usw. greifen.

II. Nullstellenbestimmung: Wir setzen f(x) = 0 und erhalten:

$\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ | ·4

$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 = 0$ (Ausklammern)

$x^2(2x^2 - 3x - 2) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x^2 = 0$, $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Für die erste der vorstehenden Gleichungen erhalten wir:

$x^2 = 0$ | √

x = 0

und somit (wegen $x^2 = 0$) eine zweifache Nullstelle x = 0. Die zweite (gemischt quadratische) Gleichung lösen wir mit der abc-Formel und haben:

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ (abc-Formel: a=2, b=-3, c=-2)

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -0{,}5 \,,\; x_2 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \,.$$

Mithin sind x = -0,5 und x = 2 einfache Nullstellen der Funktion f(x).

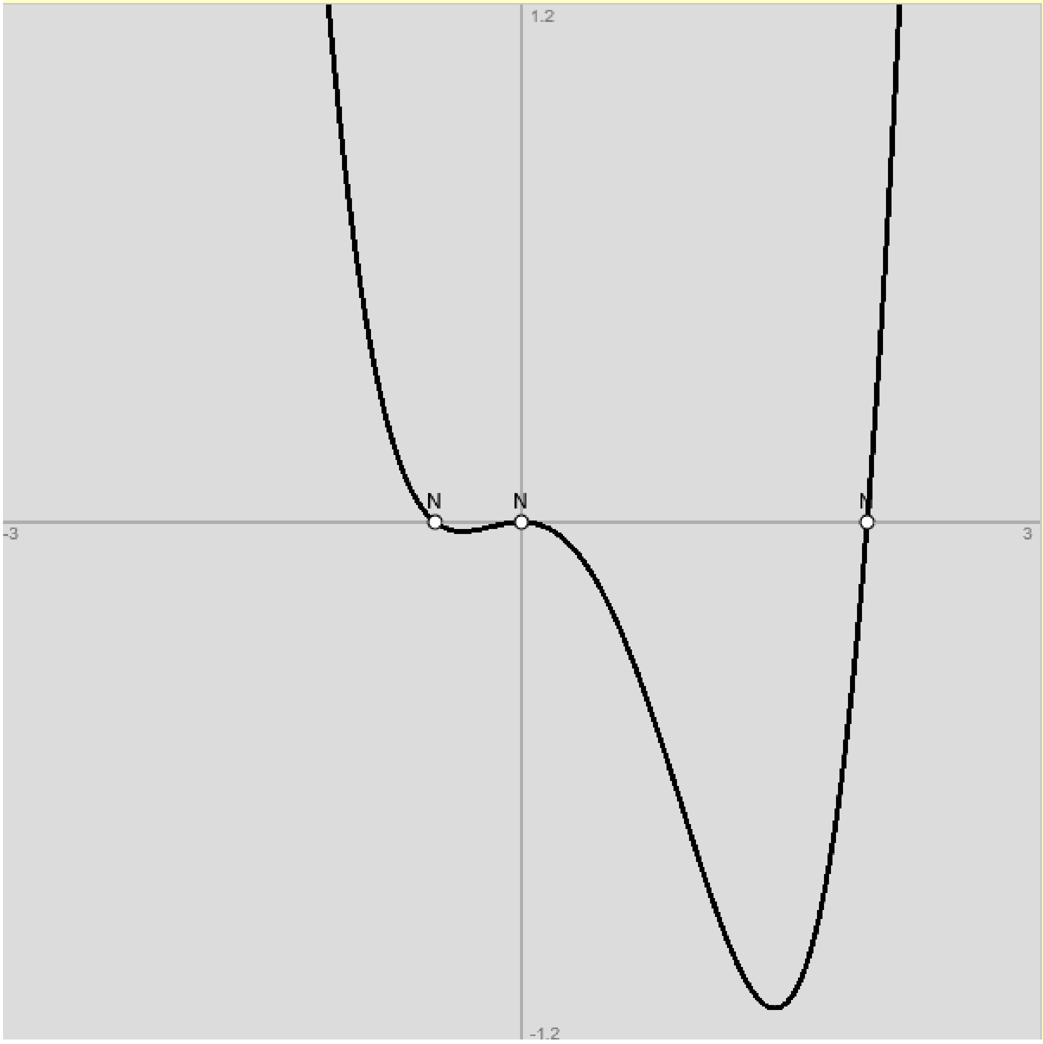
III. Linearfaktorzerlegung: Der Grad der ganz rationalen Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2$ ist n=4. Addieren wir die Vielfachheiten der drei gefundenen Nullstellen $N_1(-0,5|0)$ ($n_1=1$), $N_2(0|0)$ ($n_2=2$) und $N_3(2|0)$ ($n_3=1$), so erhalten wir: $n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 2 + 1 = 4 = n$, d.h. wir können die Funktion f(x) in Linearfaktoren zerlegen. Es gilt damit:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(x+0,5)^1(x-0)^2(x-2)^1=\frac{1}{2}x^2(x+0,5)(x-2)\,.$$

IV. Wertetabelle, Graph:

Ganz rationale Funktion: **f(x) = 0.5*x*x*(x+0.5)*(x-2)**

Wertetabelle:		
x	**f(x)**	**Nullstellen**
-0.5	0 (0)	Nullstelle N(-0.5|0)
0	0 (0)	Nullstelle N(0|0)
2	0 (0)	Nullstelle N(2|0)



www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 314