

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

## > Ganz rationale Funktionen

---

**Aufgabe:** Zerlege die ganz rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

in Linearfaktoren.

**Lösung:** I. Wir bemerken allgemein zur Linearfaktorzerlegung von ganz rationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

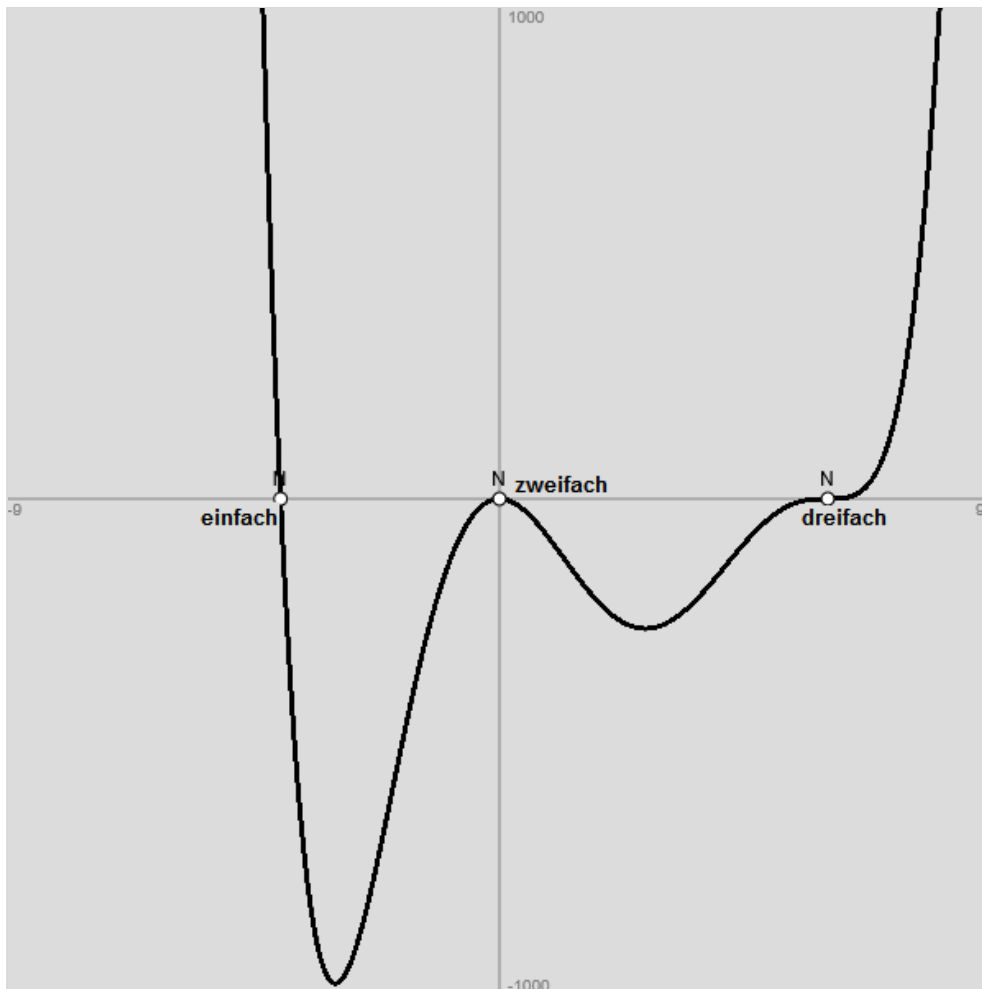
mit Grad  $n$  bei reellen Koeffizienten und ganzzahlig-nichtnegativen Exponenten das Folgende: Lassen sich zur Funktion  $f(x)$   $k$  Nullstellen  $x_i$  mit  $f(x_i) = 0$  und den Vielfachheiten  $n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , finden, so dass:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

gilt, so lässt der ganz rationale Ausdruck umformen zu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{n_k},$$

d.h. es gilt die Zerlegung der Funktion  $f(x)$  in Linearfaktoren. Die Vielfachheit  $n_i$  einer Nullstelle  $x_i$  mit  $f(x_i) = 0$  bestimmt sich, wenn etwa die Polynomdivision  $f(x) : (x - x_i)^{n_i}$  ohne Rest möglich ist oder wenn für die Ableitungen an der Stelle  $x_i$  gilt:  $f'(x_i) = \dots = f^{(n_i-1)}(x_i) = 0$ ,  $f^{(n_i)}(x_i) \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ .



Zur Bestimmung der Nullstellen von ganz rationalen Funktionen ist die Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zu lösen, wobei Lösungsmethoden wie Polynomdivision, Ausklammern, Substitution, abc- oder pq-Formel für quadratische Ausdrücke usw. greifen.

II. Nullstellenbestimmung: Wir setzen  $f(x) = 0$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 &= 0 && | \cdot 4 \\ 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 &= 0 && \text{(Ausklammern)} \\ x^2(2x^2 - 3x - 2) &= 0 && \text{(Satz vom Nullprodukt)} \\ x^2 = 0, 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Für die erste der vorstehenden Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

und somit (wegen  $x^2 = 0$ ) eine zweifache Nullstelle  $x = 0$ . Die zweite (gemischt quadratische) Gleichung lösen wir mit der abc-Formel und haben:

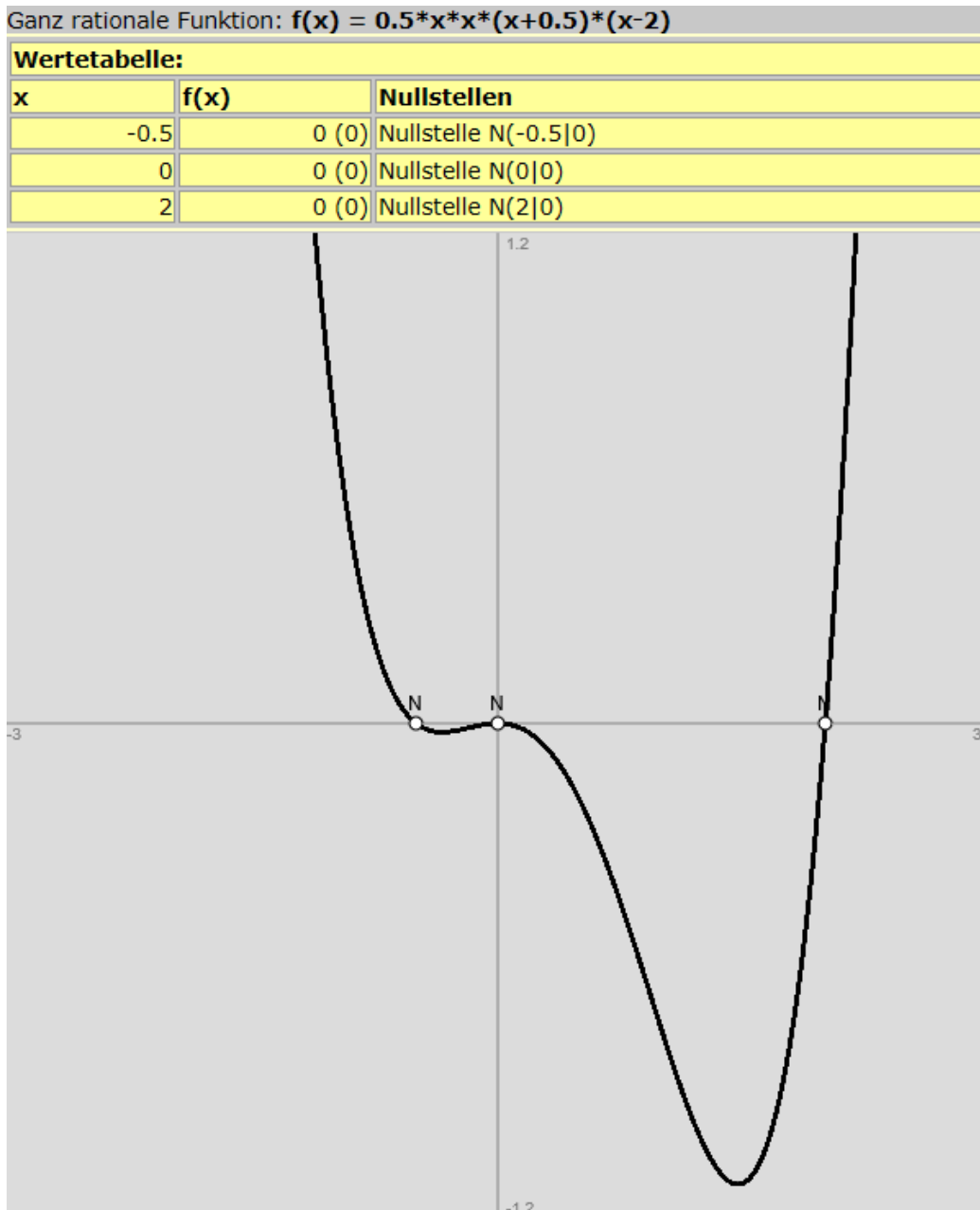
$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 2 &= 0 && \text{(abc-Formel: } a=2, b=-3, c=-2\text{)} \\ x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \\ x_1 &= \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -0,5, \quad x_2 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

Mithin sind  $x = -0,5$  und  $x = 2$  einfache Nullstellen der Funktion  $f(x)$ .

III. Linearfaktorzerlegung: Der Grad der ganz rationalen Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$  ist  $n=4$ . Addieren wir die Vielfachheiten der drei gefundenen Nullstellen  $N_1(-0,5|0)$  ( $n_1=1$ ),  $N_2(0|0)$  ( $n_2=2$ ) und  $N_3(2|0)$  ( $n_3=1$ ), so erhalten wir:  $n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 2 + 1 = 4 = n$ , d.h. wir können die Funktion  $f(x)$  in Linearfaktoren zerlegen. Es gilt damit:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x+0,5)^1(x-0)^2(x-2)^1 = \frac{1}{2}x^2(x+0,5)(x-2).$$

IV. Wertetabelle, Graph:



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 02.2017 / Aufgabe 314