Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Zerlege die ganz rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3$$

in Linearfaktoren.

Lösung: I. Wir bemerken allgemein zur Linearfaktorzerlegung von ganz rationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

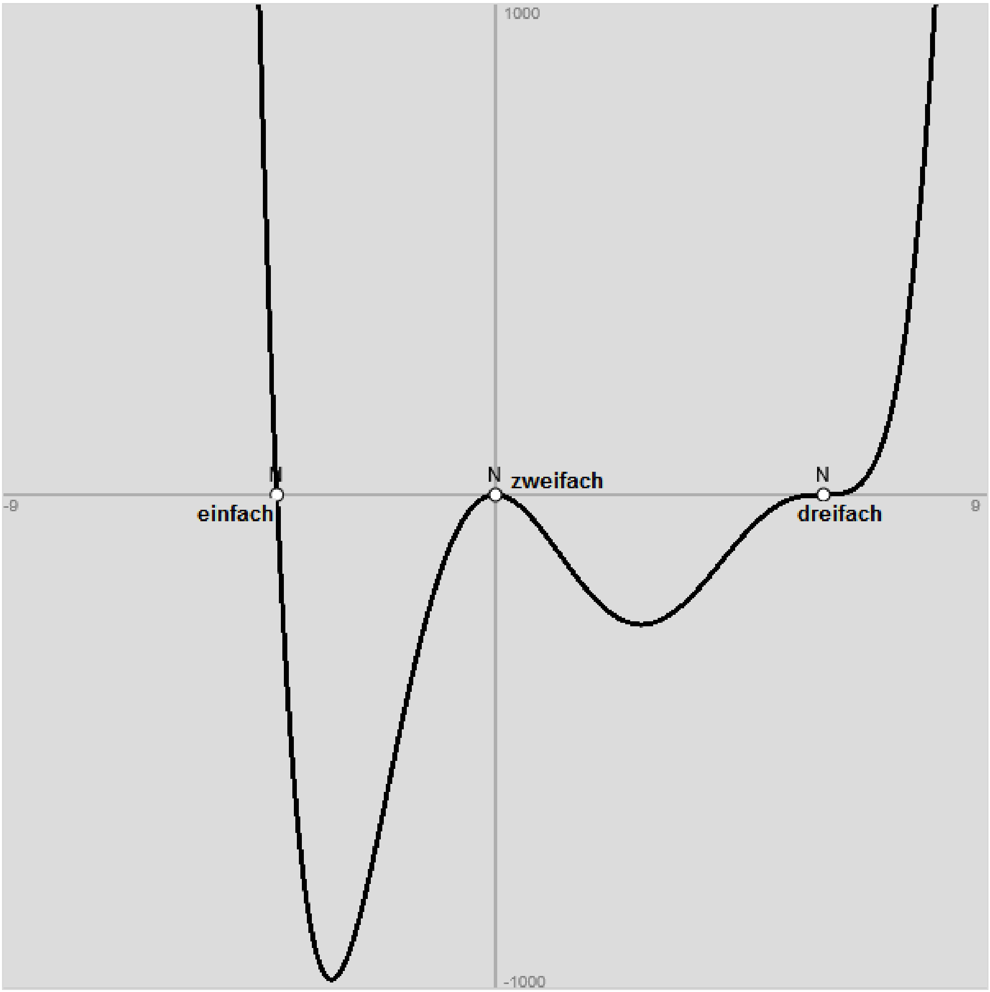
mit Grad n bei reellen Koeffizienten und ganzzahlig-nichtnegativen Exponenten das Folgende: Lassen sich zur Funktion f(x) k Nullstellen x_i mit $f(x_i) = 0$ und den Vielfachheiten n_i, $1 \le i \le k$, finden, so dass:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 1$$

gilt, so lässt der ganz rationale Ausdruck umformen zu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{n_k},$$

d.h. es gilt die Zerlegung der Funktion f(x) in Linearfaktoren. Die Vielfachheit n_i einer Nullstelle x_i mit $f(x_i) = 0$ bestimmt sich, wenn etwa die Polynomdivision $f(x) : (x - x_i)^{n_i}$ ohne Rest möglich ist oder wenn für die Ableitungen an der Stelle x_i gilt: $f'(x_i) = ... = f^{(n_i-1)}(x) = 0$, $f^{(n_i)}(x) \ne 0$, $1 \le i \le k$.



Zur Bestimmung der Nullstellen von ganz rationalen Funktionen ist die Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zu lösen, wobei Lösungsmethoden wie Polynomdivision, Ausklammern, Substitution, abc- oder pq-Formel für quadratische Ausdrücke usw. greifen.

II. Nullstellenbestimmung: Wir setzen f(x) = 0 und erhalten:

$\frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 = 0$ | ·8

$x^5 - 2x^3 = 0$ (Ausklammern)

$x^3(x^2 - 2) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$x^3 = 0$, $x^2 - 2 = 0$

Für die erste der vorstehenden Gleichungen erhalten wir:

$x^3 = 0$ | $\sqrt[3]{}$

x = 0

und somit (wegen $x^3 = 0$) eine dreifache Nullstelle x = 0. Die zweite (rein quadratische) Gleichung lösen wir wie folgt:

$x^2 - 2 = 0$ | +2

$x^2 = 2$ | √

$x = \pm\sqrt{2}$.

und haben x = -√2 und x = √2 als einfache Nullstellen der Funktion f(x).

III. Linearfaktorzerlegung: Der Grad der ganz rationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3$ ist n=5. Addieren wir die Vielfachheiten der drei gefundenen Nullstellen N_1(-√2|0) (n_1=1), N_2(0|0) (n_2=3) und

$N_3(\sqrt{2}|0)$ ($n_3=1$), so erhalten wir: $n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 3 + 1 = 5 = n$, d.h. wir können die Funktion f(x) in Linearfaktoren zerlegen. Es gilt damit:

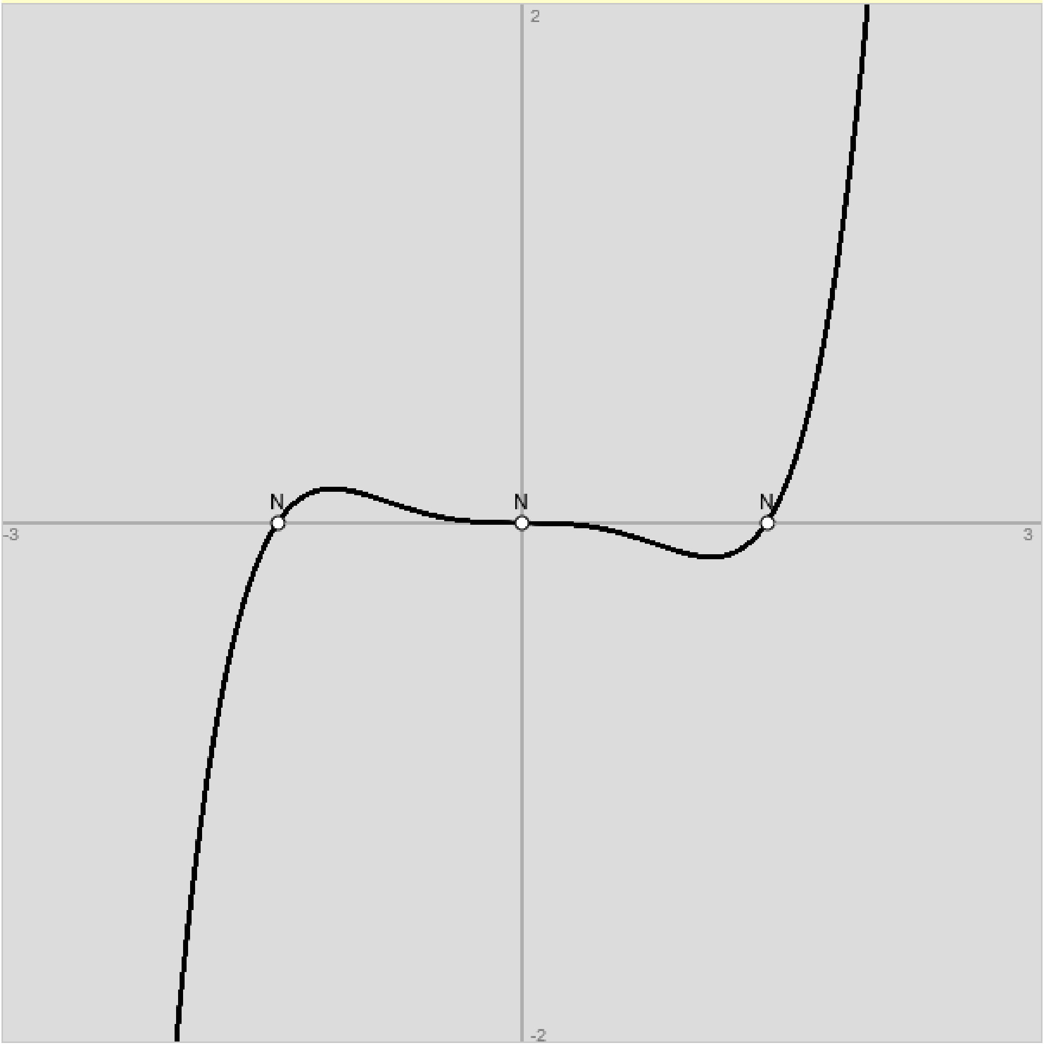
$$f(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{8}x^3(x^2-2) = \frac{1}{8}x^3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

IV. Wertetabelle, Graph:

Ganz rationale Funktion: **f(x) = 0.125*x*x*x*(x*x-2)**

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Nullstellen**
-1.41	0 (0)	Nullstelle N(-1.41|0)
0	0 (0)	Nullstelle N(0|0)
1.42	0 (0.01)	Nullstelle N(1.42|0)



www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 315