Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Gegeben sind die ganz rationalen Funktionen f(x) und g(x) mit:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5,$$
$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x.$$

a) Weise nach, dass die Funktion g(x) punktsymmetrisch zum Ursprung des x-y-Koordinatensystems ist.

b) Zeige: Die Funktion f(x) entsteht durch Verschiebung der Funktion g(x) entlang der x- und y-Achse des Koordinatensystems. Was lässt sich über die Symmetrie der Funktion f(x) aussagen?

Lösung: a) Der Nachweis der <u>Punktsymmetrie</u> der Funktion g(x) zum Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems lässt sich einerseits über die Identität g(-x) = -g(x), xε**R**, also:

$$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x) = -\frac{1}{4}x^3 - (-3x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x = -\left(\frac{1}{4}x^3 - 3x\right) = -g(x)$$

führen, andererseits besitzt $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ als ganz rationale Funktion nur Potenzen mit ungeraden Exponenten, woraus ebenfalls die Punktsymmetrie folgt.

b) I. Die <u>Verschiebung</u> der Funktion g(x) zur Funktion f(x) lässt sich ablesen am Wendepunkt der Funktion f(x). Der einzige Wendepunkt von g(x) ist wegen der Punktsymmetrie der Funktion der Koordinatenursprung O(0|0), der einzige <u>Wendepunkt</u> von f(x) ist W(4|-1) auf Grund von:

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x = 6 \Leftrightarrow x = 4$

$f'''(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(4) = 1{,}5 \neq 0$

$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 5 = -1.$

Da bei der Verschiebung von g(x) zu f(x) auch die Wendepunkte O(0|0) und W(4|-1) ineinander übergeben, muss also die Funktion g(x) um 4 LE nach rechts und 1 LE nach unten verschoben werden.

II. Wir prüfen noch nach, ob die Funktion f(x) wirklich die um 4 LE nach rechts und 1 LE nach unten verschobene Funktion g(x) ist. Dazu berechnen wir:

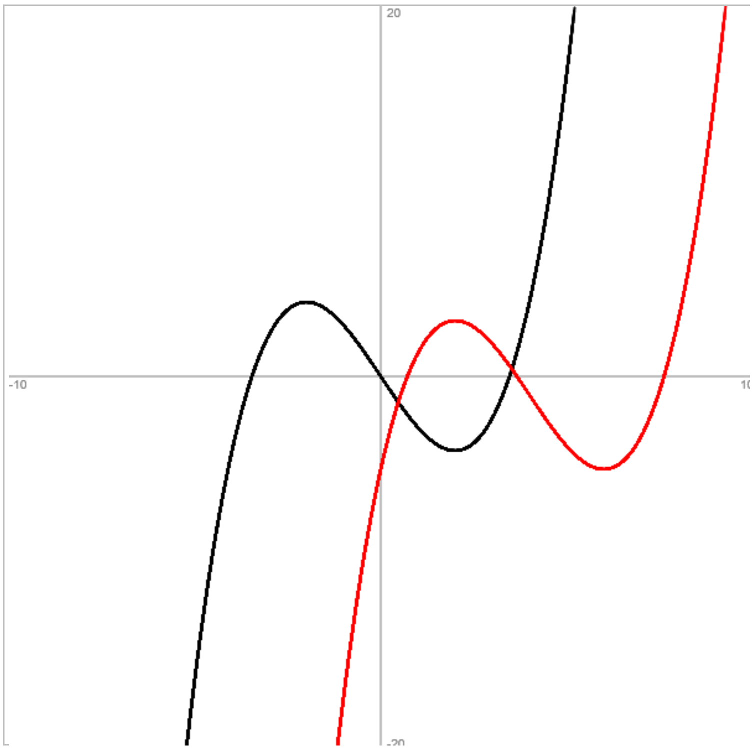
$$g(x-4) - 1 = \frac{1}{4}(x-4)^3 - 3(x-4) - 1 = \frac{1}{4}(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 3x + 12 - 1 =$$
$$\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 12x - 16 - 3x + 11 = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = f(x)$$

unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes: $(a–b)^3 = a^3–3a^2b+3ab^2–b^3$. Die <u>Identität</u>:

f(x) = g(x–4) – 1

ist damit bewiesen, d.h.: die Funktion f(x) ist eine verschobene Funktion g(x).

III. Da g(x) punktsymmetrisch zum Ursprung und Wendepunkt O(0|0) ist, muss auch f(x) punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(4|-1) sein. Es liegt also eine allgemeine Punktsymmetrie bei f(x) vor.



Funktionen g(x), f(x)

www.michael-buhlmann.de / 05.2020 / Aufgabe 1024