Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme unter Verwendung der geometrischen Reihe die Potenz-/Taylorreihe der Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3}\text{ , } -1<x<1.$$

Lösung: I. Die <u>geometrische Reihe</u> (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) lautet für reelle z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}\text{ , } -1<z<1 \text{ (*)}.$$

II. Wir nutzen die geometrische Reihe (*), indem wir $z = -x^3$ setzen, und erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x^3)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1 \cdot x^3)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (x^3)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot x^{3i} \text{ .}$$

Die gesuchte <u>Potenz-/Taylorreihe</u> lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot x^{3i} \text{ .}$$

Die Reihe konvergiert für $-1<z<1 \Leftrightarrow -1<-x^3<1 \Leftrightarrow -1<x^3<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1201