Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme unter Verwendung der geometrischen Reihe die Potenz-/Taylorreihe der Funktion:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \ -1<x<1.$$

Lösung: I. Die geometrische Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) lautet für reelle z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}, \ -1<z<1 \ (*).$$

II. Wir formen die vorgegebene Funktion zunächst um:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{2x}{1+x} = 1-2x \cdot \frac{1}{1+x},$$

nutzen die geometrische Reihe (*), indem wir z = -x setzen, und erhalten:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1-2x \cdot \frac{1}{1+x} = 1-2x \cdot \frac{1}{1-(-x)} = 1-2x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = 1-2x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1 \cdot x)^i =$$

$$1-2x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot x^i = 1-2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot x^{i+1} = 1+2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot x^{i+1} = 1+2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot x^i.$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1+2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot x^i.$$

Die Reihe konvergiert für $-1<z<1 \Leftrightarrow -1<-x<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1203