Michael Buhlmann

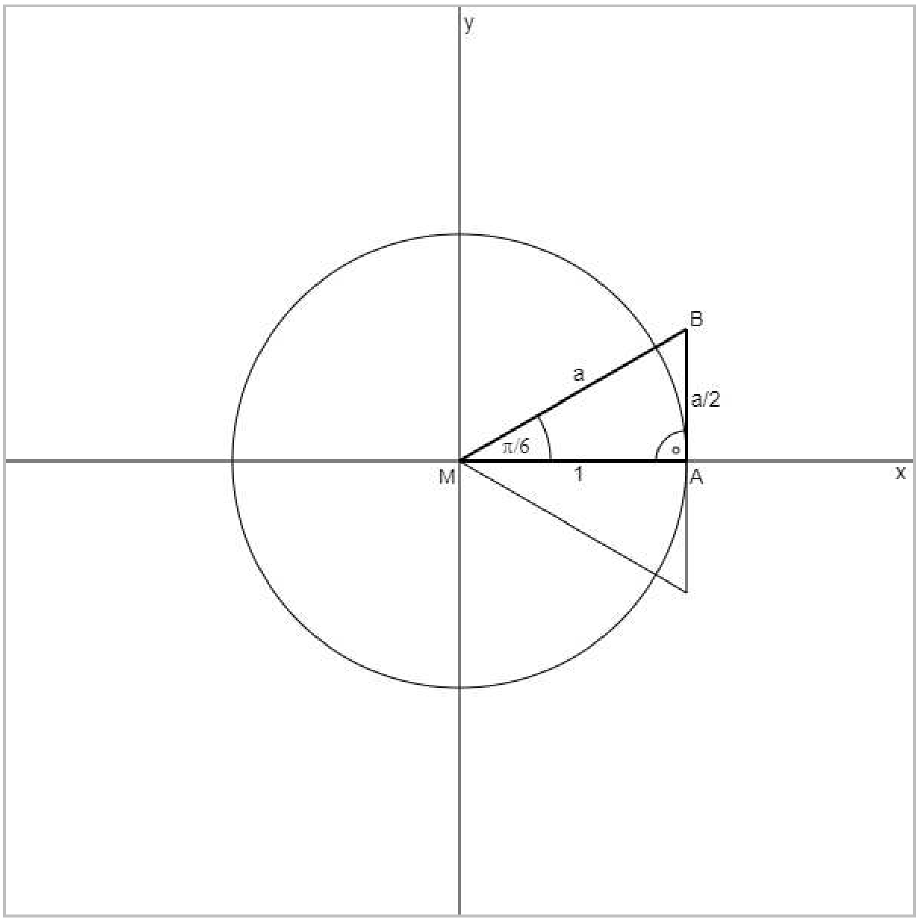
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Berechne vermöge der Beziehung:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

eine (hinreichend gute) Näherung für die Kreiszahl π.

Lösung: I. Zunächst deuten wir die Beziehung: $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ geometrisch am <u>Einheitskreis</u> des x-y-Koordinatensystems mit Mittelpunkt M(0|0):



Das Dreieck ΔMAB wird an der x-Achse gespiegelt wegen des Winkels π/6 = 30° zu einem gleichseitigen Dreieck mit Höhe h = 1. Im gleichseitigen Dreieck gilt zwischen Höhe h und Seite a die Beziehung:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow 2h = a\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Damit folgt für die Seitenlänge: $a = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, für die halbe Seitenlänge: $\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Im rechtwinkligen Dreieck ΔMAB gilt zudem noch die Beziehung mit dem Tangens als Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete, also von a/2 zu h:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

so dass in der Tat das Gewünschte folgt.

II. Für das Nachfolgende betrachten wir noch eine Potenzreihendarstellung. Die <u>geometrische Reihe</u> (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) lautet für reelle z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}, \ -1<z<1 \ (*).$$

III. Der <u>Tangens</u> als Quotient von Sinus und Kosinus ergibt abgeleitet:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \tan^2 x.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion des Tangens, des <u>Arkustangens</u>, ergibt sich vermöge der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ als:

x = tan(y) => x' = 1 + $\tan^2$(y)

y = arctan(x) => y' = $\frac{1}{x'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

IV. Die Beziehung: $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gibt nun Anlass für eine <u>Reihenentwicklung</u> des Arkustangens f(x). Denn es gilt zunächst:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow \ \frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ (**).$$

Die Ableitung des Arkustangens lässt sich dann mit Hilfe der geometrischen Reihe (*) bei $z = -x^2$ darstellen als:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i}.$$

Gliedweise Integration der Potenzreihe ergibt dann:

$$f(x) = \arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}.$$

Die Potenzreihe konvergiert für -1<x<1.

V. Es folgt somit hinsichtlich der <u>näherungsweisen Bestimmung der Zahl π</u> gemäß (**):

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2i+1} \ \Rightarrow \ \pi = 6 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2i+1}.$$

Näherungen von π ergeben sich aus der Partialsummenfolge (s_n):

$$s_n = 6 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2i+1}$$

Die Werte der Partialsummenfolge (s_n) sind aus der nachstehenden Tabelle ablesbar:

Wertetabelle:		
n	$a_n = f(n)$	$s_n = s_{n-1}+a_n$
0	3.4641016151377553	3.4641016151377553
1	-0.3849001794597507	3.0792014356780046
2	0.07698003589195015	3.1561814715699548
3	-0.01832857997427385	3.137852891595681
4	0.004751854067404333	3.1426047456630855
5	-0.001295960200201182	3.141308785462884
6	0.0003655272359541797	3.1416743126988385
7	-0.00010559675705342971	3.141568715941785
8	0.000031057869721596985	3.1415997738115067
9	-0.000009262873425739452	3.141590510938081
10	0.0000027935650014134866	3.1415933045030826
11	-8.502154352128004e-7	3.141592454287647
12	2.607327334652589e-7	3.141592715020381
13	-8.047306588433918e-8	3.141592634547315
14	2.4974399757208717e-8	3.1415926595217147
15	-7.78771605332315e-9	3.1415926517339985
16	2.4385777540708864e-9	3.1415926541725763
17	-7.664101512794216e-10	3.1415926534061662
18	2.416608585115294e-10	3.141592653647827
19	-7.642266465749223e-11	3.1415926535714043
20	2.423157659871705e-11	3.141592653595636
21	-7.701508841452709e-12	3.1415926535879346
22	2.4530731865367894e-12	3.1415926535903878
23	-7.828956978308905e-13	3.141592653589605
24	2.503135904629378e-13	3.1415926535898553
25	-8.016579040969907e-14	3.141592653589775
26	2.5713555414431783e-14	3.1415926535898007
27	-8.25950567857506e-15	3.1415926535897922
28	2.6565661539276517e-15	3.141592653589795
29	-8.555043546546677e-16	3.141592653589794
30	2.7581834385041205e-16	3.1415926535897944
31	-8.902073531679968e-17	3.1415926535897944
32	2.8760545256196826e-17	3.1415926535897944
33	-9.300673839068629e-18	3.1415926535897944
34	3.010363030036707e-18	3.1415926535897944
35	-9.75188023814708e-19	3.1415926535897944
36	3.161568479033986e-19	3.1415926535897944
37	-1.0257533287532491e-19	3.1415926535897944
38	3.3303679504975624e-20	3.1415926535897944
39	-1.0820182792755797e-20	3.1415926535897944
40	3.517672595175754e-21	3.1415926535897944

Wir vergleichen die Ergebnisse noch mit einer „exakten“ Darstellung der Kreiszahl π:
π = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944…