Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Potenzreihenentwicklung der Funktion:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Lösung: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der Kosinusfunktion (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$); diese lautet für alle reellen x:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} \quad (*).$$

II. Es gilt:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{(*)}{=} \frac{1-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}}{x^2} = \frac{-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}}{x^2} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \cdot \frac{x^{2i}}{x^2} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i-2} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i)!} x^{2i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i)!} x^{2(i-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+1))!} x^{2i}.$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i)!} x^{2(i-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+1))!} x^{2i}.$$

Die Reihe konvergiert für alle reellen x und existiert auch bei x=0 mit Reihenwert 0,5.

III. Letzteres wird auch klar, wenn wir auf die Funktion $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ die Regel von de l'Hospital anwenden. Es ergibt sich nämlich bei Betrachtung der Stelle x=0 ein Grenzwert vom Typ „$\frac{0}{0}$" mit:

$$\lim_{x->0} f(x) = \lim_{x->0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x->0} \frac{\sin x}{2x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x->0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1205