

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Potenzreihen

**Aufgabe:** Bestimme eine Potenzreihenentwicklung (Entwicklungsmittelpunkt  $x_0 = 0$ ) der Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

**Lösung:** I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der Sinusfunktion (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt  $z_0 = 0$ ); diese lautet für alle reellen  $x$ :

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \quad (*).$$

Auch gilt für die geometrische Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt  $z_0 = 0$ ) mit reellen  $z$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}, \quad -1 < z < 1 \quad (**).$$

II. Es gilt u.a. mit  $z = -x^2$  in der geometrischen Reihe sowie mit Hilfe des Cauchyprodukts für absolut konvergente Potenzreihen:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \sin x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \sin x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} \stackrel{(*),(**)}{=} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} (-x^2)^j \right) =$$

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \cdot (-1)^{n-k} x^{2(n-k)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+n-k}}{(2k+1)!} x^{2k+1+2(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(2k+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}.$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}.$$

Die Reihe konvergiert für alle  $x$  mit:  $-1 < x < 1$ .