Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Potenzreihenentwicklung (Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$) der Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)} .$$

Lösung: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der geometrischen Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) mit reellen z:

$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$, -1<z<1 (*)

sowie die geometrische Summe:

$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (**).

II. Es gilt u.a. u.a. mit z = x bzw. z = x/2 in der geometrischen Reihe, mit q = 0,5 in der geometrischen Summe sowie mit Hilfe des Cauchyprodukts für absolut konvergente Potenzreihen:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(2-x)} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})} \underset{(*)}{=}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^j \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j x^j \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} x^{n-k} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} x^{k+n-k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \right) x^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{k} \right) x^n \underset{(**)}{=}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) x^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1}{-1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) x^n .$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) x^n .$$

Die Reihe konvergiert für alle x mit: -1<x<1.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1207