

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ zu der Funktion:

$$f(x) = \sinh(x).$$

Lösung: I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich die Taylorreihe $T(x)$ mit Entwicklungsmittelpunkt x_0 als:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i .$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe sind dann Funktion und Taylorreihe identisch mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i ,$$

der Konvergenzradius R (reellwertig oder $+\infty$) bestimmt sich z.B. mit:

$$R = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right|}} ,$$

im Konvergenzintervall $(x_0 - R; x_0 + R)$ konvergiert die Potenzreihe, an den Intervallrändern ist Konvergenz oder Divergenz möglich, außerhalb des Intervalls $[x_0 - R; x_0 + R]$ divergiert die Potenzreihe. Eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ heißt zudem Maclaurinreihe mit:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i .$$

II. Wir bestimmen die Folge der Ableitungen der Funktion Sinus hyperbolicus als:

$$f(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x) \Rightarrow f''(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'''(x) = \cosh(x), \dots$$

und haben an der Stelle $x_0 = 0$ die Werte:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1, \dots,$$

so dass allgemein gilt:

$$f^{(2i)}(0) = 0, f^{(2i+1)}(0) = 1, i \in \mathbf{N}_0.$$

Es ergibt sich als Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ somit:

$$f(x) = \sinh(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} x^{2i+1} .$$

Die Reihe konvergiert für alle reellen x auf Grund von:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{1}{(2i+1)!}} = 0 \Rightarrow R = +\infty.$$