Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = \pi/2$ zu der Funktion:

$$f(x) = \sin(x).$$

Lösung: I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich die Taylorreihe T(x) mit Entwicklungsmittelpunkt x_0 als:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \ .$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe sind dann Funktion und Taylorreihe identisch mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \ ,$$

der Konvergenzradius R (reellwertig oder +∞) bestimmt sich z.B. mit:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{i->\infty} \sqrt[i]{\left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right|}} \ ,$$

im Konvergenzintervall (x_0-R; x_0+R) konvergiert die Potenzreihe, an den Intervallrändern ist Konvergenz oder Divergenz möglich, außerhalb des Intervalls [x_0-R; x_0+R] divergiert die Potenzreihe. Eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ heißt zudem Maclaurinreihe mit:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \ .$$

II. Wir bestimmen die Folge der Ableitungen der Sinusfunktion:

f(x) = sin(x) => f'(x) = cos(x) => f''(x) = -sin (x) => f'''(x) = -cos(x) => f''''(x) = sin(x), ...

und haben an der Stelle $x_0 = \pi/2$ die Werte:

f(π/2) = 1, f'(π/2) = 0, f''(π/2) = -1, f'''(π/2) = 0, f''''(π/2) = 1, …,

so dass allgemein gilt:

$f^{(2i)}(\pi/2) = (-1)^i$, $f^{(2i+1)}(\pi/2) = 0$, $i \varepsilon \mathbf{N_0}$.

Es ergibt sich als Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ somit:

f(x) = sin(x) = $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2i}$,

wobei die Reihe wiederum mit der verschobenen Kosinusfunktion

f(x) = sin(x) = $\displaystyle\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2i}$,

identisch ist. Die Reihe konvergiert für alle reellen x auf Grund von:

$\displaystyle\lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\right|} = \lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\frac{1}{(2i+1)!}} = 0$ => R = +∞.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1211