

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Potenzreihen

**Aufgabe:** Bestimme eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt  $x_0 = \pi/2$  zu der Funktion:

$$f(x) = \sin(x).$$

**Lösung:** I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich die Taylorreihe  $T(x)$  mit Entwicklungsmittelpunkt  $x_0$  als:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i .$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe sind dann Funktion und Taylorreihe identisch mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i ,$$

der Konvergenzradius  $R$  (reellwertig oder  $+\infty$ ) bestimmt sich z.B. mit:

$$R = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right|}} ,$$

im Konvergenzintervall  $(x_0 - R; x_0 + R)$  konvergiert die Potenzreihe, an den Intervallrändern ist Konvergenz oder Divergenz möglich, außerhalb des Intervalls  $[x_0 - R; x_0 + R]$  divergiert die Potenzreihe. Eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt  $x_0 = 0$  heißt zudem Maclaurinreihe mit:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i .$$

II. Wir bestimmen die Folge der Ableitungen der Sinusfunktion:

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin(x), \dots$$

und haben an der Stelle  $x_0 = \pi/2$  die Werte:

$$f(\pi/2) = 1, f'(\pi/2) = 0, f''(\pi/2) = -1, f'''(\pi/2) = 0, f^{(4)}(\pi/2) = 1, \dots,$$

so dass allgemein gilt:

$$f^{(2i)}(\pi/2) = (-1)^i, f^{(2i+1)}(\pi/2) = 0, i \in \mathbf{N}_0.$$

Es ergibt sich als Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt  $x_0 = \pi/2$  somit:

$$f(x) = \sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2i} ,$$

wobei die Reihe wiederum mit der verschobenen Kosinusfunktion

$$f(x) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2i} ,$$

identisch ist. Die Reihe konvergiert für alle reellen  $x$  auf Grund von:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\left| \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \right|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{1}{(2i+1)!}} = 0 \Rightarrow R = +\infty.$$