Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Potenzreihenentwicklung (Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$) der Parameterfunktionen:

$$f_t(x) = \frac{1+x\sin(tx)}{1+x^2}\text{, t reell.}$$

Zeige damit, dass die Funktionen $f_t(x)$ abhängig vom Parameter t an der Stelle x = 0 einen Hoch- bzw. Tiefpunkt besitzen.

Lösung: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der Sinusfunktion (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$); diese lautet für alle reellen x:

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \quad (*).$$

Auch gilt für die geometrische Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) mit reellen z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}\text{, } -1<z<1 \ (**).$$

II. Es gilt u.a. mit $z = -x^2$ in der geometrischen Reihe sowie mit Hilfe des Cauchyprodukts für absolut konvergente Potenzreihen:

$$f_t(x) = \frac{1+x\sin(tx)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + x\sin(tx)\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} + x\sin(tx)\cdot\frac{1}{1-(-x^2)} \underset{(*),(**)}{=}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-x^2)^j\right) + \left(x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}(tx)^{2i+1}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-x^2)^j\right) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}t^{2i+1}x^{2i+2}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j}\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+2}\cdot(-1)^{n-k}x^{2(n-k)} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+n-k}}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+2+2(n-k)} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2n+2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n x^{2n+2}.$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f_t(x) = \frac{1+x\sin(tx)}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n x^{2n+2}.$$

Die Reihe konvergiert für alle x mit: -1<x<1.

III. Wir bilden die 1. und 2. Ableitung der Potenzreihe und erhalten:

$$f_t'(x)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot 2jx^{2j-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)x^{2n+1}$$

$$f_t''(x)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot 2j\cdot(2j-1)x^{2j-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)(2n+1)x^{2n}\ .$$

IV. Einsetzen der Stelle x = 0 in Funktion und Ableitungen führt auf die Werte:

$$f_t(0)=\frac{1+0\cdot\sin(t\cdot 0)}{1+0^2}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$$f_t'(0)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot 2j\cdot 0^{2j-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)\cdot 0^{2n+1}=0+0=0$$

$$f_t''(0)=(-1)^1\cdot 2\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot 1+\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\cdot 2j\cdot(2j-1)\cdot 0^{2j-2}$$

$$+\frac{t^1}{1!}\cdot(-1)^0(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+1)\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)(2n+1)x^{2n}$$

$$= -2+2t.$$

V. Wegen $f_t'(0) = 0$ besitzt die Parameterfunktion $f_t(x)$ im Punkt $P(0|f_t(0)) = P(0|1)$ eine waagerechte Tangente. Der Wert der 2. Ableitung ist: $f_t''(0) = 2t – 2$. Auf Grund von:

$f_t''(0) = 0 \Leftrightarrow 2t – 2 = 0 \Leftrightarrow 2t = 2 \Leftrightarrow t = 1$

gilt:

<u>t>1</u>: $f_t''(0) > 0$ => P(0|1) ist <u>Tiefpunkt</u> der Funktion $f_t(x)$
<u>t<1</u>: $f_t''(0) < 0$ => P(0|1) ist <u>Hochpunkt</u> der Funktion $f_t(x)$.

VI. Für <u>t=1</u> besitzt die Funktion $f_1(x)$ ebenfalls einen Hochpunkt P(0|1). Betrachten wir nämlich:

$$f_1'''(x)=\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\cdot 2j\cdot(2j-1)(2j-2)x^{2j-3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)(2n+1)\cdot 2nx^{2n-1}$$

$$f_1''''(x)=\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\cdot 2j\cdot(2j-1)(2j-2)(2j-3)x^{2j-4}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}\right)(-1)^n(2n+2)(2n+1)\cdot 2n(2n-1)x^{2n-2}\ ,$$

so ist:

$f_1'''(0) = 0$
$f_1''''(0) = (-1)^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + (1+1/6)\cdot(-1)^1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 4! – 7\cdot 4!/6 = -4!/6 = -4 < 0$.

Da eine gerade (die 4.) Ableitung zum ersten Mal an der Stelle x = 0 ungleich null ist, liegt dort ein Extrempunkt vor, der wegen $f_1''''(0) < 0$ ein <u>Hochpunkt</u> ist.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1241