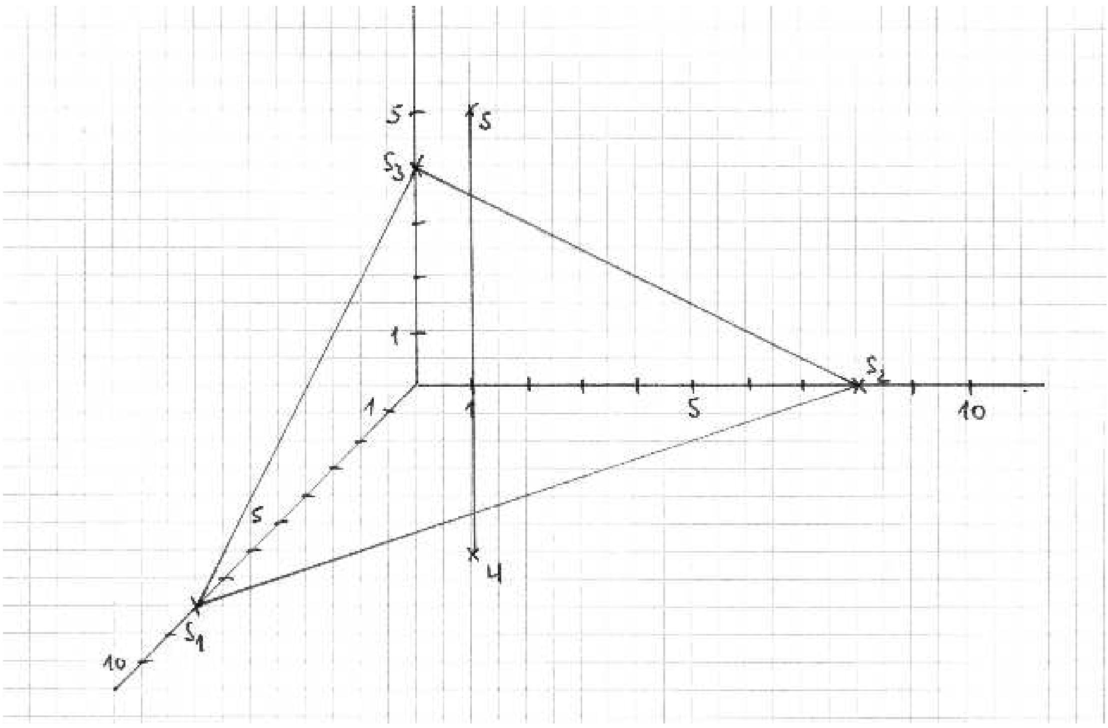
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Projektion

Aufgabe: Die Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ mit $x_3 \geq 0$ erhebt sich als Hang über der x_1-x_2-Grundebene. Vor dem Hang steht ein senkrechter Mast im Punkt H(6|4|0), der eine Höhe von 8 aufweist.

a) Zeichne Hang und Sendemast in ein Koordinatensystem ein! Wie groß ist der Neigungswinkel des Hangs gegenüber der Grundebene?
b) Der Mast wird auf halber Höhe senkrecht mit einem Seil am Hang verankert. Wo muss das Seil auf dem Hang befestigt werden und wie lang ist das Seil?
c) Die Sonne bescheint aus der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ Mast, Grundebene und Hang? Wie lang ist der Schatten, den der Mast auf Hang und Grundebene wirft?
d) Der Mast knickt auf Grund äußerer Einwirkung im Punkt K(6|4|k) um. Die Mastspitze kommt auf dem Hang im Punkt R(4|0|2) zu liegen. In welcher Höhe ist der Mast abgeknickt?

Lösung: a) Zum Einzeichnen des Hangs benötigen wir die Spurpunkte der Ebene E mit: S_1(8|0|0), S_2(0|8|0), S_3(0|0|4) (jeweils zwei der Variablen x_1 bis x_3 in der Ebenengleichung Null setzen und nach der dritten Variable auflösen). Der Fuß des Mastes ist H(6|4|0), die Mastspitze liegt wegen der Länge 8 bei S(6|4|8). Es ergibt sich die Zeichnung:



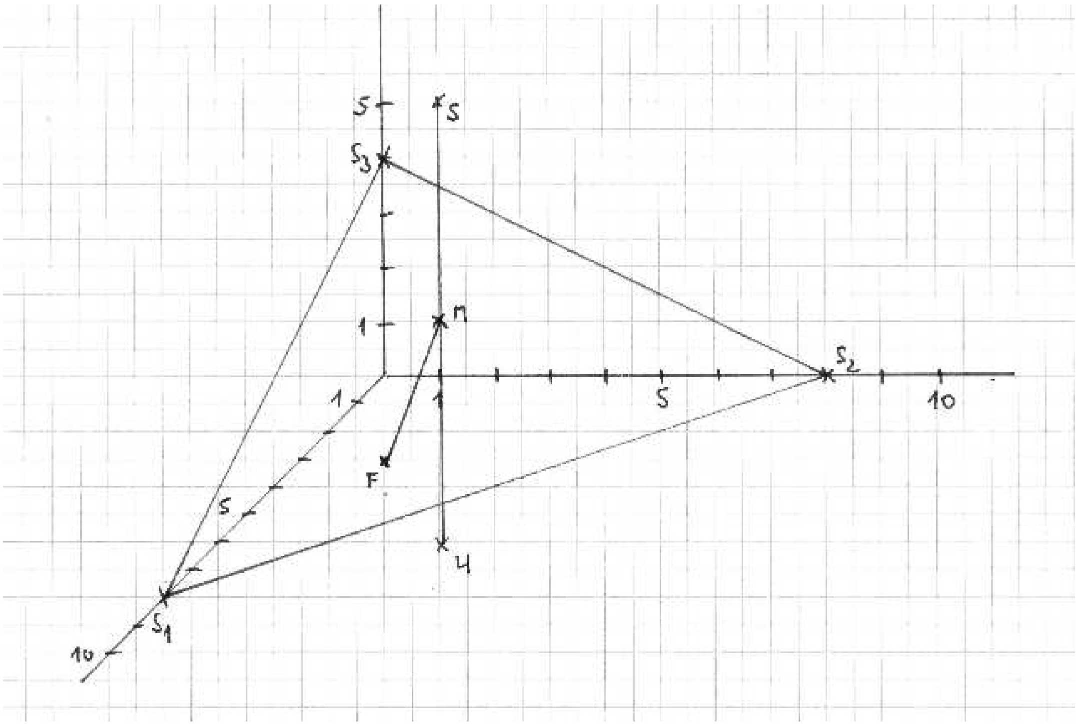
Der Neigungswinkel φ der Ebene E bzgl. der x_1-x_2-Grundebene errechnet sich wegen den Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für E und $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für die Grundebene als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}}$$ = 0,8614 => φ = 35,26°.

b) Die Mitte M des Mastes ist wegen $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OS}\right)$ der Punkt M(6|4|4). Wir bilden die Hilfsgerade h: $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + t\,\vec{n}_E$ mit h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und lassen diese mit Ebene E schneiden, also:

h -> $x_1 = 6 + t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 4 + 2t$ -> E -> (6+t) + (4+t) + 2(4+2t) = 8 => 18 + 6t = 8 =>
6t = -10 => t = -5/3 .

Damit gilt für den Fußpunkt des Seils auf der Ebene: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/3\\7/3\\2/3\end{pmatrix}$ und: $F(4\frac{1}{3}|2\frac{1}{3}|\frac{2}{3})$.



Die Länge des Seils ist dann: $\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\begin{pmatrix}5/3\\5/3\\10/3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}$ = 4,08.

c) Wir bilden die Hilfsgerade durch die Mastspitze S mit Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}$: i: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}$

und schneiden i mit der Ebene E:
i -> $x_1 = 6 - 3t$, $x_2 = 4 - t$, $x_3 = 8 - 4t$ -> E -> (6–3t) + (4–t) + 2(8–4t) = 8 => 26 – 12t = 8 =>
-12t = -18 => t = 1,5

Der Schnittpunkt T, wo der Schatten des Mastes auf dem Hang endet, ist damit: $\vec{OT} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + 1{,}5 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, also: T(1,5|2,5|2). (Der Schnittwinkel bei T ist übrigens 73,90°, der Sonnenstand beträgt: 38,33° über dem Horizont.) Wir bilden nun die Hilfs ebene F, die den Mast und die Hilfsgerade i enthält. Der Schatten des Mastes auf dem Hang läuft entlang der Hilfsebene F, d.h. entlang der Schnittgeraden zwischen E und F. Die Hilfsebene F wird aufgespannt durch die drei Punkte H, S und T. S ist der Stützvektor der Hilfsebene in Parameterform, es gilt:

F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.

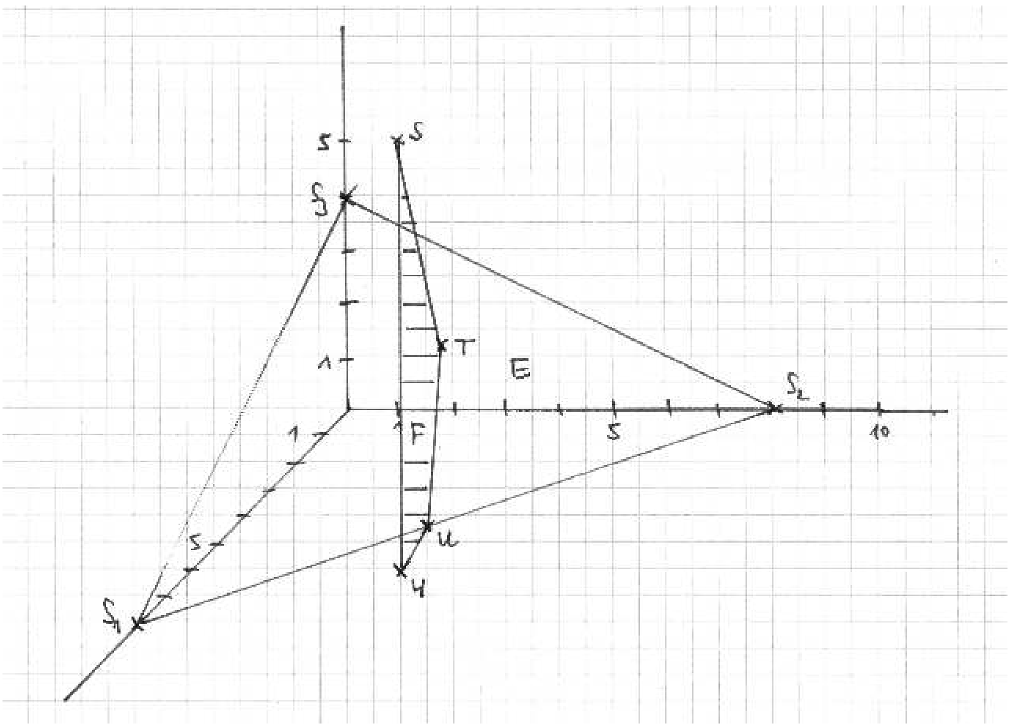
Die Schnittgerade k von E und F ergibt sich aus:

F -> $x_1 = 6 - 3t$, $x_2 = 4 - t$, $x_3 = 8 - 4t - 8u$ -> E -> (6–3t) + (4–t) + 2(8–4t–8u) = 8 =>

26 – 12t – 16u = 8 => -12t – 16u = -18 => -12t = -18 + 16u => t = 1,5 – $\frac{4}{3}$u

und damit als:

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + (1{,}5 - \frac{4}{3}u) \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$



Wir verfolgen den Schatten bis zur x_1-x_2-Grundebene und erhalten den Spurpunkt U der Hilfsgeraden k wie folgt:

k -> $x_3 = 2 - \frac{8}{3}$u = 0 => 6 – 8u = 0 => 6 = 8u => u = $\frac{3}{4}$ => $\vec{OU} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also: U(4,5|3,5|0). Hinsichtlich der Schattenlänge d gilt:

d = $\left|\overrightarrow{TU}\right| + \left|\overrightarrow{UH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4,5-1,5 \\ 3,5-2,5 \\ 0-2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 6-4,5 \\ 4-3,5 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} + \sqrt{1,5^2+0,5^2} =$

$\sqrt{14} + \sqrt{2,5} = 5,32$.

d) Zunächst ist die Länge e des abgeknickten Teils des Mastes der Abstand der Punkte S und K:
e = 8 – k (*),
aber auch die Länge zwischen den Punkten R und K:

e = $\left|\overrightarrow{RK}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6-4 \\ 4-0 \\ k-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ k-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+4^2+(k-2)^2} = \sqrt{20+(k-2)^2}$ (**).

Gleichsetzen von (*) und (**) ergibt dann eine Wurzelgleichung, die wir nach k umstellen:

$8 - k = \sqrt{20+(k-2)^2}$	| $()^2$
$(8-k)^2 = 20 + (k-2)^2$	| Klammern auflösen
$64 - 16k + k^2 = 20 + k^2 - 4k + 4$	| $-k^2$
$64 - 16k = 24 - 4k$	| +16k
$64 = 24 + 12k$	| –24
$40 = 12k$	| :12
$k = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$	

Die Länge des umgeknickten Mastteils beträgt damit: e = $8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$.

08.2014 / Aufgabe 42