Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Projektion

Aufgabe: Eine rechteckige Platte ABCD ist 6 LE (Längeneinheiten) lang und 4 LE breit. Die Platte schwebt 2 LE über der x_1-x_2-Ebene des kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems. 4 LE mittig über der Platte befindet sich eine Lichtquelle Z, die die Platte bestrahlt. Welchen Schatten wirft die Platte auf die x_1-x_2-Ebene? Bestimme die Ecken des Schattens und dessen Flächeninhalt.

1. Lösung: I. Die vier Eckpunkte ABCD der Platte werden mit der x_3-Achse als Zentrum angeordnet, so dass die über der x_1-x_2-Ebene liegenden Punkte mit folgenden Koordinaten darstellbar sind: A(2|-3|2), B(2|3|2), C(-2|3|2), D(-2|-3|2). Die Lichtquelle befindet sich folglich auf der x_3-Achse mit: Z(0|0|6).

II. Wir bestimmen die vier Geraden durch die Lichtquelle und je einen Platteneckpunkt als:

$$g_A:\ \vec{x} = \vec{OZ} + t\,\vec{ZA} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

$$g_B:\ \vec{x} = \vec{OZ} + t\,\vec{ZB} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$g_C:\ \vec{x} = \vec{OZ} + t\,\vec{ZC} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$$

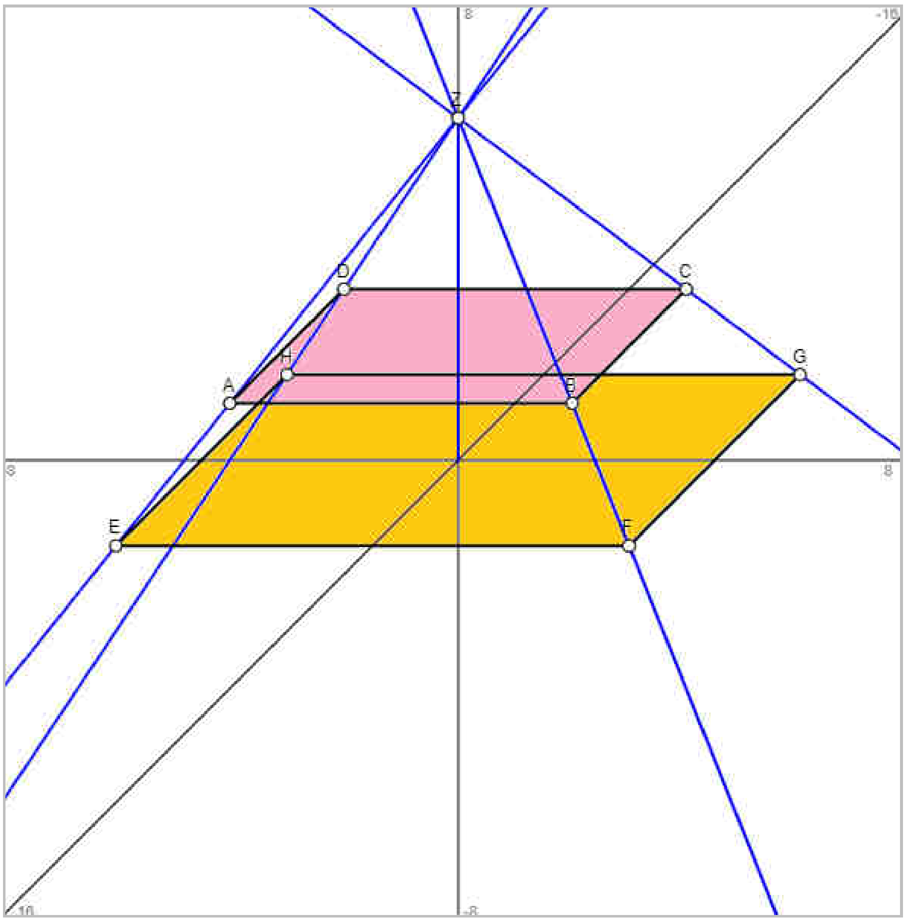
$$g_D:\ \vec{x} = \vec{OZ} + t\,\vec{ZD} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\end{pmatrix}.$$

III. Die Geraden schneiden die x_1-x_2-Ebene in den Spurpunkten E, F, G, H mit $x_3 = 0$. Es gilt also:

g_A: $x_3 = 0$ => 6-4t = 0 => 6 = 4t => t=1,5 -> Spurpunkt E(3|-4,5|0)
g_B: $x_3 = 0$ => 6-4t = 0 => 6 = 4t => t=1,5 -> Spurpunkt F(3|4,5|0)
g_C: $x_3 = 0$ => 6-4t = 0 => 6 = 4t => t=1,5 -> Spurpunkt G(-3|4,5|0)
g_D: $x_3 = 0$ => 6-4t = 0 => 6 = 4t => t=1,5 -> Spurpunkt H(-3|-4,5|0).

IV. Da die Lichtquelle mittig über der Platte ABCD platziert ist, ist auch das Viereck EFGH ein Rechteck, innerhalb dessen sich der Schatten der Platte auf der x_1-x_2-Ebene befindet. Der Flächeninhalt des rechteckigen Schattens berechnet sich dann als:

$$A_{EFGH} = \left|\vec{EF}\right| \cdot \left|\vec{FG}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 9 \cdot 6 = 54 \text{ FE}.$$



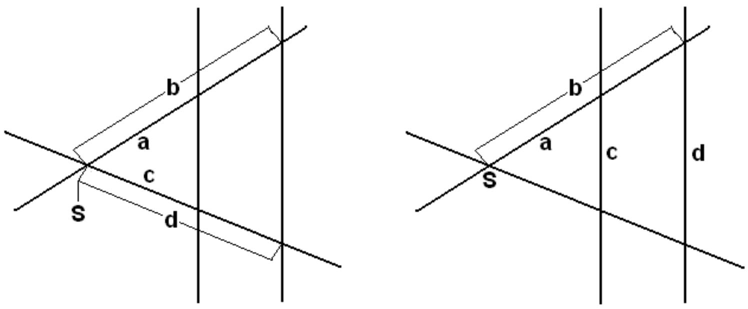
2. Lösung: I. Wir wenden die Strahlensätze aus der Geometrie an. Es gilt die geometrische Situation: Zwei vom Strahlenzentrum S ausgehende Geraden werden von zwei parallelen Geraden geschnitten. Dann gilt der 1. Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem 1. sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl. Ebenso gilt der 2. Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



1. Strahlensatz | 2. Strahlensatz

II. Mit der Lichtquelle Z(0|0|6) als Strahlenzentrum und dem Strahl zwischen Z und dem Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems ergeben sich laut obiger Zeichnung als Abschnitte der Strecke $\overline{ZO}$ 4 LE zwischen Z und der Platte ABCD und 4+2 = 6 LE zwischen Z und der x_1-x_2-Ebene, so dass das Verhältnis beider Abschnitte k = 6:4 = 1,5 ist; k heißt Streckfaktor. Gemäß dem 1. Strahlensatz erhalten wir sofort die Eckpunkte des Schattens auf der x_1-x_2-Ebene, wenn die x_1- bzw. x_2-Koordinaten der Punkte A, B, C, D mit k multipliziert werden. Dies rührt daher, dass die Lichtquelle

Z mittig über der Platte ABCD liegt und sich Platte und x_1-x_2-Ebene parallel zueinander befinden. Es ergeben sich die Projektionspunkte: E(3|-4,5|0), F(3|4,5|0), G(-3|4,5|0), H(-3|-4,5|0).

III. Der Flächeninhalt des Schattens EFGH folgt aus dem Flächeninhalt der Platte ABCD. Es ist:

$A_{ABCD} = 6 \cdot 4 = 24$ FE.

Gemäß der aus den Strahlensätzen folgenden Tatsache, dass sich der Inhalt einer Fläche mit dem Faktor k^2 vervielfacht, wenn die Fläche um den Faktor k gestreckt wird, folgt für den gesuchten Flächeninhalt:

$A_{EFGH} = k^2 \cdot A_{ABCD} = 1{,}5^2 \cdot 24 = 54$ FE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1659