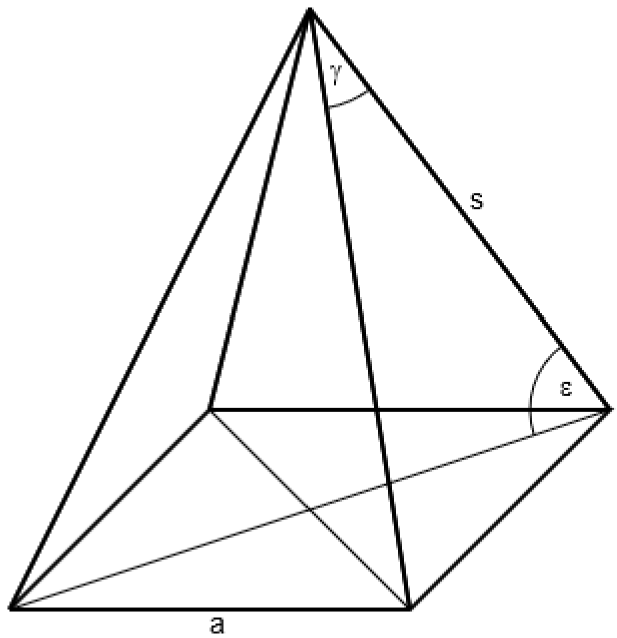
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: die Grundkante a = 8 cm, der Winkel eines Mantelflächendreiecks γ = 40,8°. Berechne den Winkel, den die Seitenkante mit der Grundfläche einschließt.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

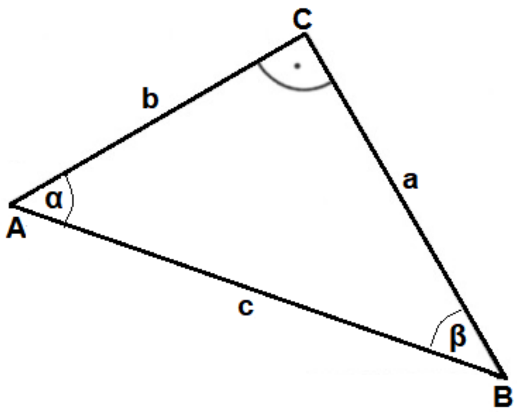
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

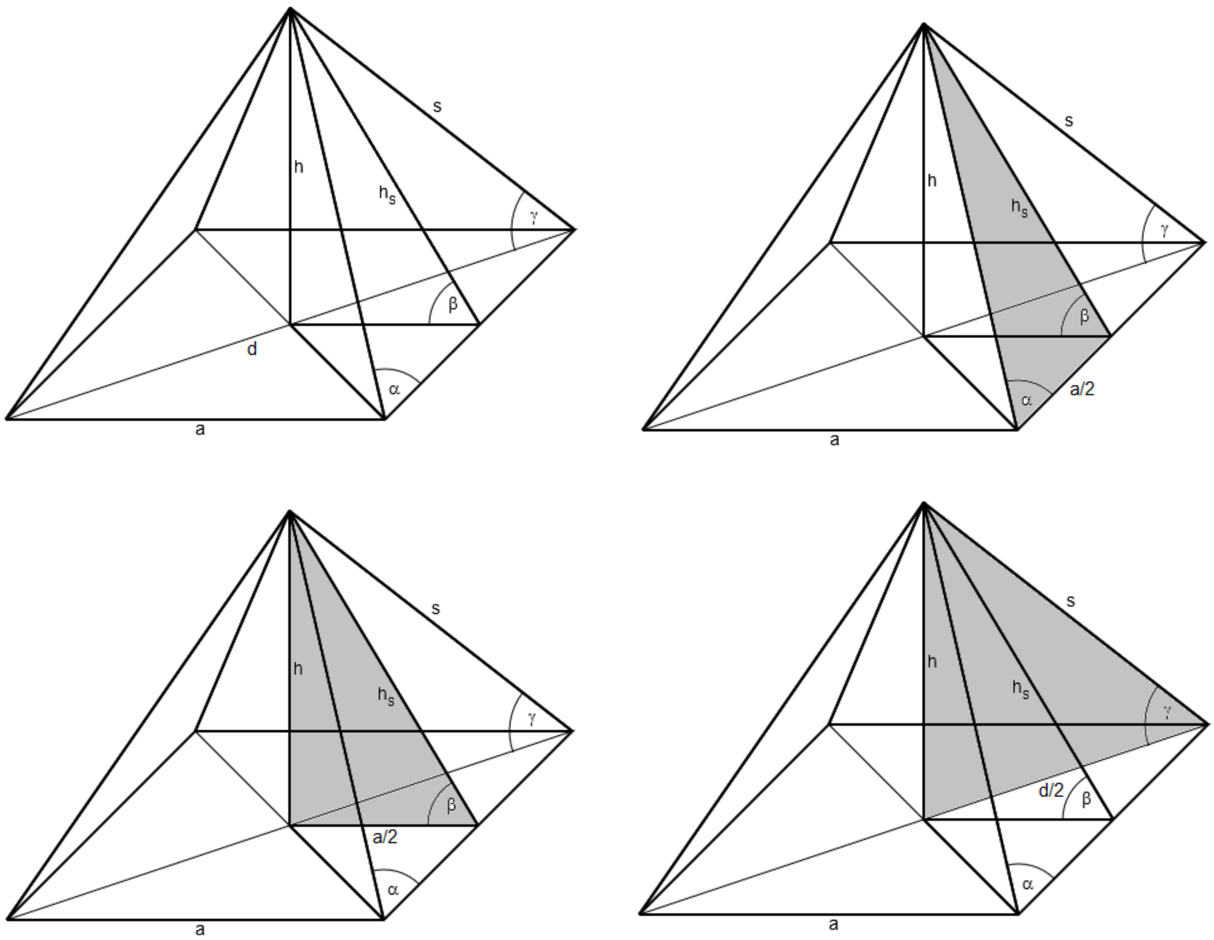
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\ .$$



II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen <u>quadratischen Pyramide</u> gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

III. Im gleichschenkligen Mantelflächendreieck ist der Winkel an der Spitze γ = 40,8° groß, die Grundkante ist a = 8 cm lang. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel γ/2 = 40,8°:2 = 20,4° und Gegenkathete a/2 = 4 cm. Solch ein rechtwinkliges Dreieck wird außerdem durch die Seitenhöhe h_s als Ankathete und die Seitenkante s als Hypotenuse begrenzt. Wir berechnen die Seitenkante s mit Hilfe des Sinus:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s} \Rightarrow \sin 20{,}4° = \frac{4}{s} \Rightarrow s = \frac{4}{\sin 20{,}4°}$$ = 11,48 cm.

IV. Die Grundfläche G der Pyramide ist ein Quadrat mit Grundkantenlänge a = 8 cm. Letztlich nach dem Satz des Pythagoras ist die Diagonale d dieses Quadrats

$d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 8\sqrt{2}$ = 11,31 cm.

V. Wir betrachten das rechtwinklige Diagonaldreieck in der Pyramide, das durch die Seitenkante s, die halbe Diagonale d/2 und die Pyramidenhöhe h begrenzt wird. Wir bestimmen:

d/2 = 11,31:2 = 5,66 cm

und kennen mit der Seitenkante s = 11,48 cm somit zwei Seiten im Dreieck. Der Winkel ε zwischen Seitenkante und Grundfläche bestimmt sich dann mit Hilfe des Kosinus:

$$\cos\varepsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s} \Rightarrow \cos\varepsilon = \frac{5{,}66}{11{,}48} \Rightarrow \varepsilon = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}66}{11{,}48}\right)$$ = 60,46° ≈ 60,5°.

Der gesuchte Winkel ist also: ε = 60,5°.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 783