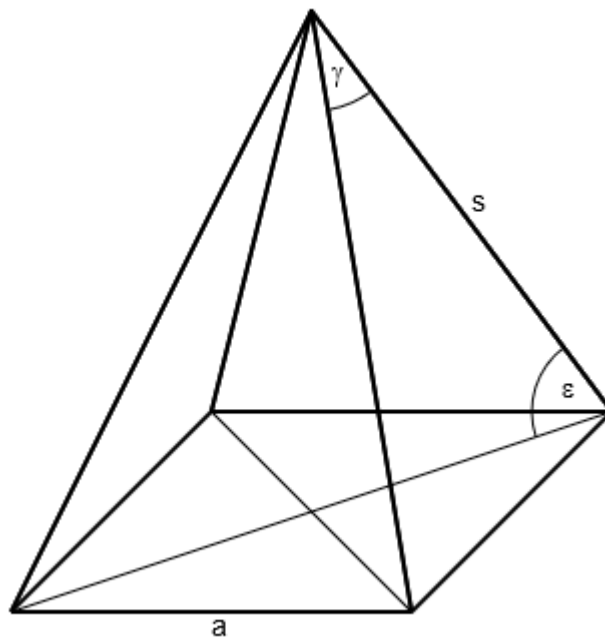


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Körperberechnung

> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: die Grundkante $a = 8 \text{ cm}$, der Winkel eines Mantelflächendreiecks $\gamma = 40,8^\circ$. Berechne den Winkel, den die Seitenkante mit der Grundfläche einschließt.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

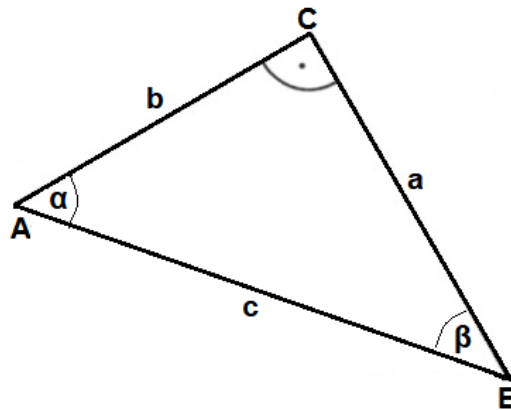
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta, \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

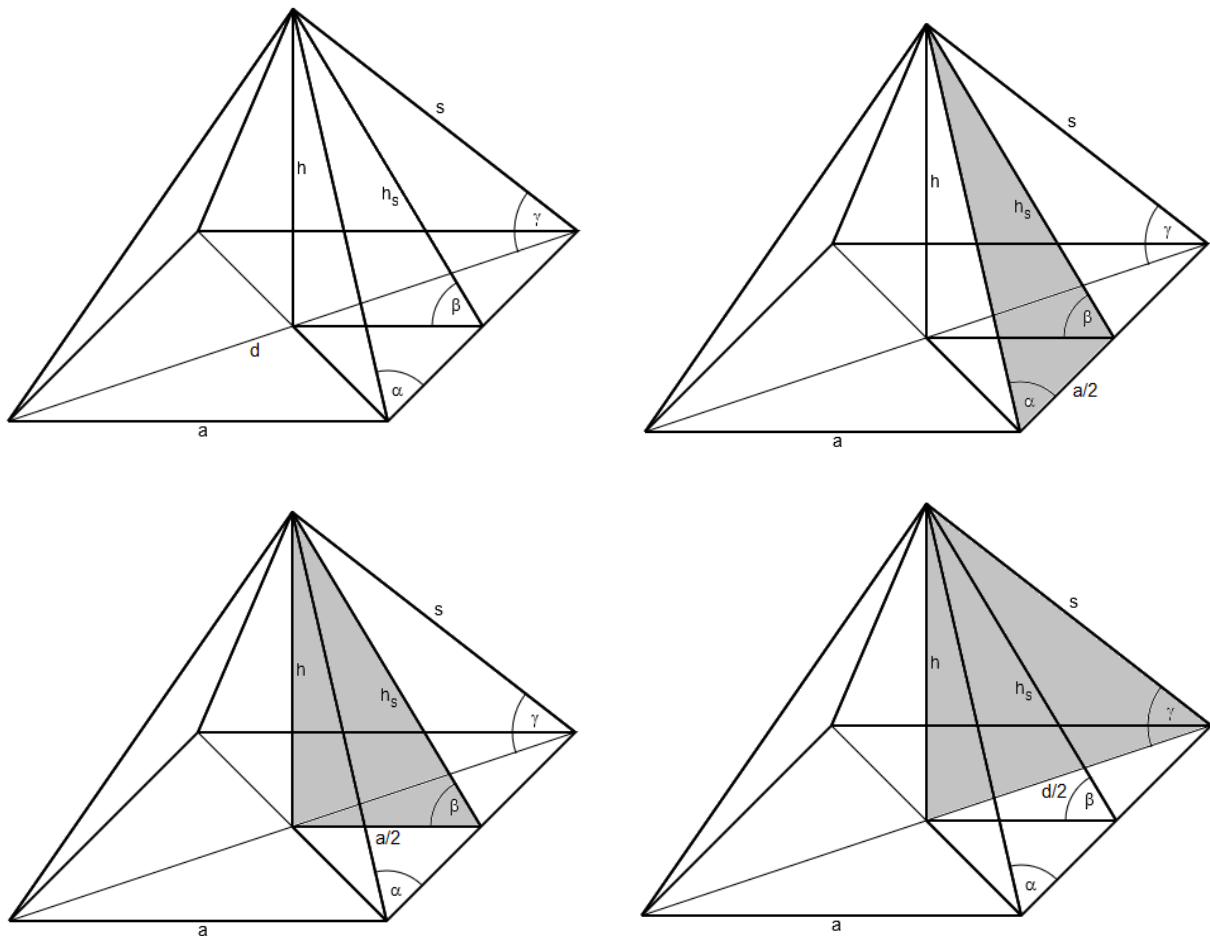
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s , die Kantenlänge s , die Oberfläche O , die Mantelfläche M , die Grundfläche G und das Volumen V .



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden- höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- kante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- fläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

III. Im gleichschenkligen Mantelflächendreieck ist der Winkel an der Spitze $\gamma = 40,8^\circ$ groß, die Grundkante ist $a = 8$ cm lang. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel $\gamma/2 = 40,8^\circ : 2 = 20,4^\circ$ und Gegenkathete $a/2 = 4$ cm. Solch ein rechtwinkliges Dreieck wird außerdem durch die Seitenhöhe h_s als Ankathete und die Seitenkante s als Hypotenuse begrenzt. Wir berechnen die Seitenkante s mit Hilfe des Sinus:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a}{s} \Rightarrow \sin 20,4^\circ = \frac{4}{s} \Rightarrow s = \frac{4}{\sin 20,4^\circ} = 11,48 \text{ cm.}$$

IV. Die Grundfläche G der Pyramide ist ein Quadrat mit Grundkantenlänge $a = 8$ cm. Letztlich nach dem Satz des Pythagoras ist die Diagonale d dieses Quadrats

$$d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 8\sqrt{2} = 11,31 \text{ cm.}$$

V. Wir betrachten das rechtwinklige Diagonaldreieck in der Pyramide, das durch die Seitenkante s , die halbe Diagonale $d/2$ und die Pyramidenhöhe h begrenzt wird. Wir bestimmen:

$$d/2 = 11,31 : 2 = 5,66 \text{ cm}$$

und kennen mit der Seitenkante $s = 11,48$ cm somit zwei Seiten im Dreieck. Der Winkel ε zwischen Seitenkante und Grundfläche bestimmt sich dann mit Hilfe des Kosinus:

$$\cos \varepsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s} \Rightarrow \cos \varepsilon = \frac{5,66}{11,48} \Rightarrow \varepsilon = \cos^{-1}\left(\frac{5,66}{11,48}\right) = 60,46^\circ \approx 60,5^\circ.$$

Der gesuchte Winkel ist also: $\varepsilon = 60,5^\circ$.