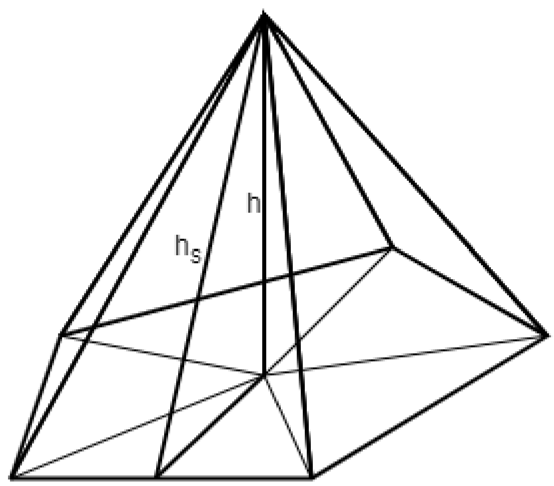
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Fünfeckpyramide

Aufgabe: Von einer regelmäßigen Fünfeckpyramide sind gegeben: die Seitenhöhe h_s = 6,9 cm, die Höhe h = 6 cm. Berechne Oberfläche und Rauminhalt der Pyramide.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

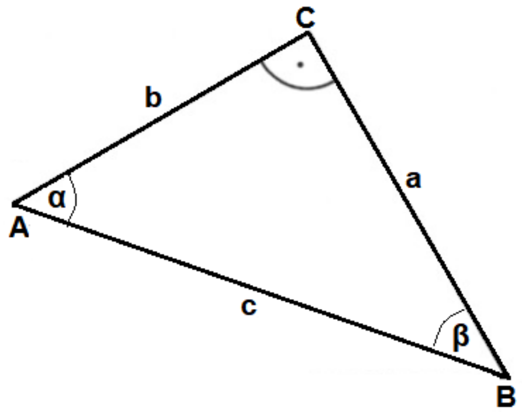
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

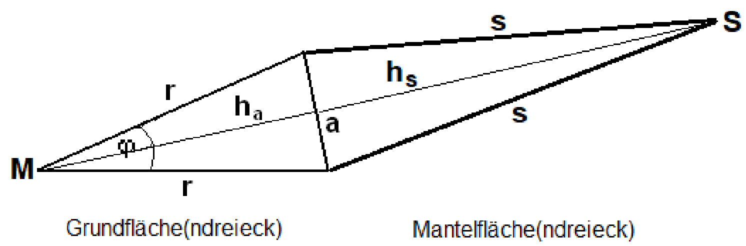
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$



II. Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 72°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



In einer regelmäßigen <u>Fünfeckpyramide</u> gelten dann die folgenden Beziehungen:

Fünfeckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 36°$	$r = \frac{h_a}{\cos 36°}$	$h_a = r \cdot \cos 36°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 36°}$
Grundfläche	$G = \frac{5}{2} a h_a$	$h_a = \frac{2G}{5a}$	$a = \frac{2G}{5h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{5}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{5a}$	$a = \frac{2M}{5h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$

Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{r}{s}$	$\tan\gamma = \frac{h}{r}$

III. Zusammen mit h_a, der Höhe in einem der fünf Grundflächendreiecke der Fünfeckpyramide, bilden die Pyramidenhöhe h und die Seitenhöhe h_s das Höhendreieck. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$h_a^2 = h_s^2 - h^2 = 6{,}9^2 - 6^2 = 11{,}61 \Rightarrow h_a = \sqrt{11{,}61}$ = 3,4 cm.

IV. Im gleichschenkligen Grundflächendreieck ist der Innenwinkel wegen der regelmäßigen Fünfeckpyramide: φ = 360°:5 = 72°. Der halbe Innenwinkel im halben Grundflächendreieck beträgt demgemäß: φ/2 = 36°. Das halbe Grundflächendreieck ist rechtwinklig mit den Katheten h_a und a/2. Somit berechnen wir mit dem Tangens die Gegenkathete a/2 als:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \Rightarrow \tan 36° = \frac{\frac{a}{2}}{3{,}4} \Rightarrow \frac{a}{2} = 3{,}4 \cdot \tan 36° = 2{,}47 \Rightarrow \text{ a = 4,94 cm}$$

und erhalten damit die Pyramidengrundkante a = 4,94 cm.

V. Mit der Grundkante a, der Seitenhöhe h_s und der Grundflächenhöhe h_a erhalten wir sofort die Oberfläche der Pyramide – entweder vermöge der Grundfläche G und der Mantelfläche M mit:

$G = \frac{5}{2} a h_a = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 3{,}4$ = 41,99 ≈ 42 cm²

$M = \frac{5}{2} a h_s = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 6{,}9$ = 85,22 ≈ 85,2 cm²

O = G + M = 42 + 85,2 = 127,2 cm²

oder unmittelbar vermöge der Formel:

$O = \frac{5}{2} a(h_a + h_s) = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot (3{,}4 + 6{,}9) = \frac{5}{2} \cdot 4{,}94 \cdot 10{,}3$ = 127,21 ≈ 127,2 cm².

VI. Das Volumen (Rauminhalt) der Fünfeckpyramide ergibt sich aus Grundfläche G und Pyramidenhöhe h mit: G = 42 cm² und h = 6 cm als:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 42 \cdot 6$ = 84 cm³.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 784