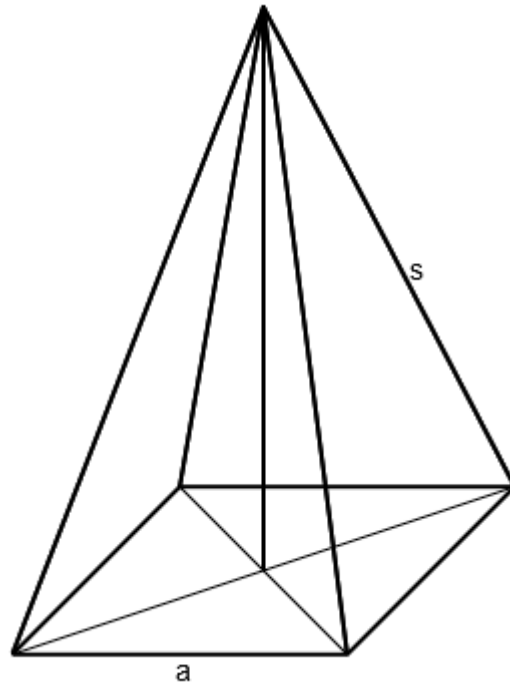


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Körperberechnung

### > Quadratische Pyramide

**Aufgabe:** Eine quadratische Pyramide besitzt die Grundkante  $a = 9,2$  cm und die Seitenkante  $s = 16,8$  cm. Berechne das Pyramidenvolumen.



**Lösung:** I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

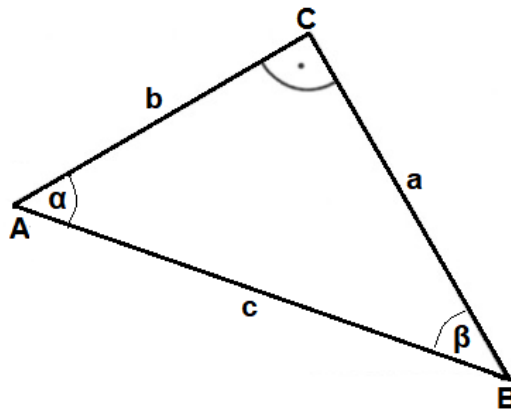
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta, \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

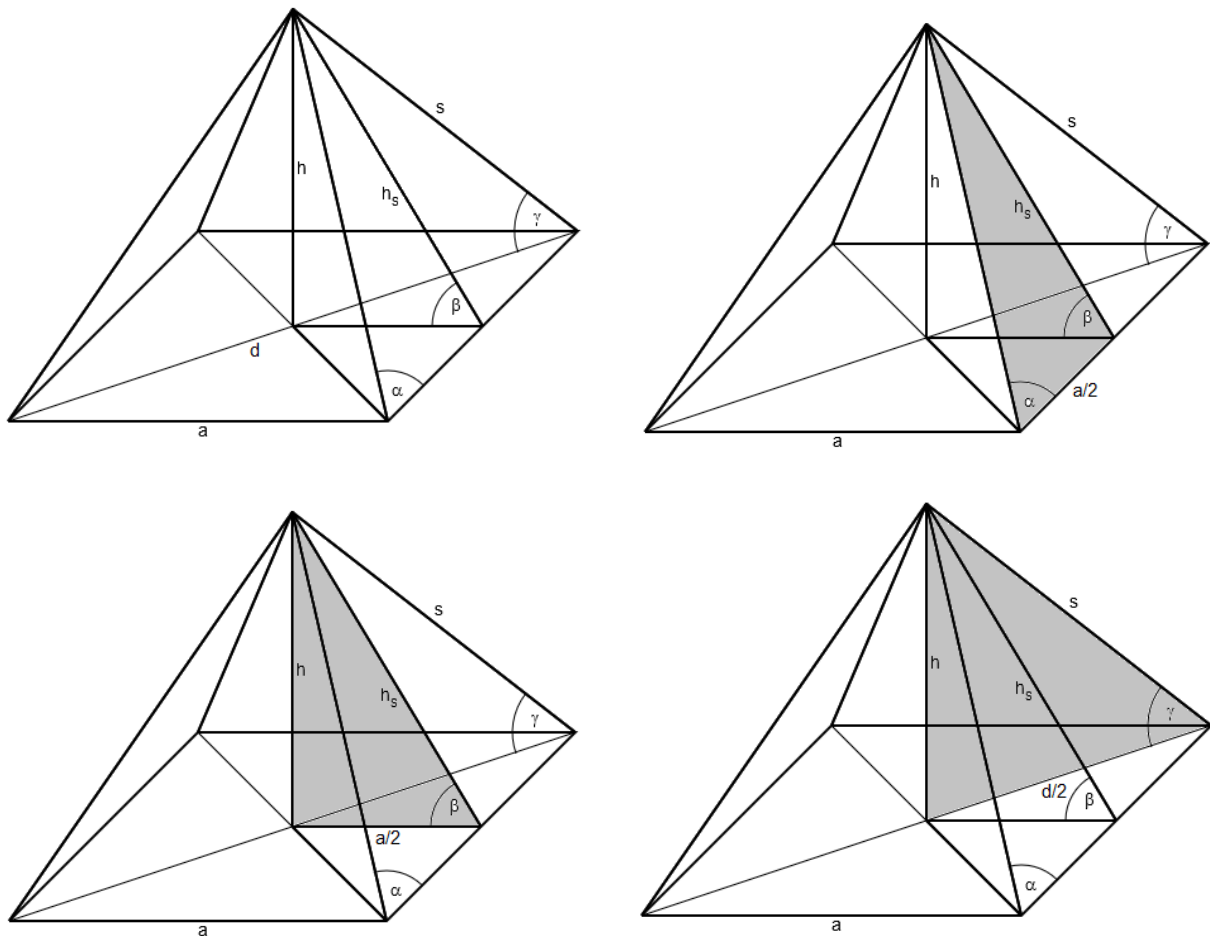
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten  $a$ ,  $b$  ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge  $a$  des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe  $h$  bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe  $h_s$ , die Kantenlänge  $s$ , die Oberfläche  $O$ , die Mantelfläche  $M$ , die Grundfläche  $G$  und das Volumen  $V$ .



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

## Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden- höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- kante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe $h_s$ und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- fläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

III. Wir beginnen mit der Berechnung des Grundflächeninhalts der quadratischen Pyramide. Die Grundkante ist  $a = 9,2$  cm lang, die Grundfläche als Quadrat mit Grundkantenlänge somit  $G = a^2 = 9,2^2 = 84,64$  cm<sup>2</sup> groß.

IV. Die Grundflächendiagonale  $d$  ergibt sich aus der Grundkante  $a = 9,2$  cm als:  $d = a\sqrt{2} = 9,2\sqrt{2} = 13,01$  cm, die halbe Diagonale somit als:  $d/2 = 6,51$  cm.

V. Im rechtwinkligen Diagonaldreieck der Pyramide mit den Seiten  $d/2$ ,  $h$  und  $s$  sind nun  $d/2$  und  $s$  bekannt, so dass nach dem Satz des Pythagoras für die Pyramidenhöhe  $h$  folgt:

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 16,8^2 - 6,51^2 = 239,86 \Rightarrow h = \sqrt{239,86} = 15,49 \text{ cm.}$$

VI. Das Pyramidenvolumen errechnet sich aus Grundflächeninhalt  $G = 84,64$  cm<sup>2</sup> und Pyramidenhöhe  $h = 15,49$  cm als:

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 84,64 \cdot 15,49 = 96 \text{ cm}^3 = 437,02 \approx 437 \text{ cm}^3.$$