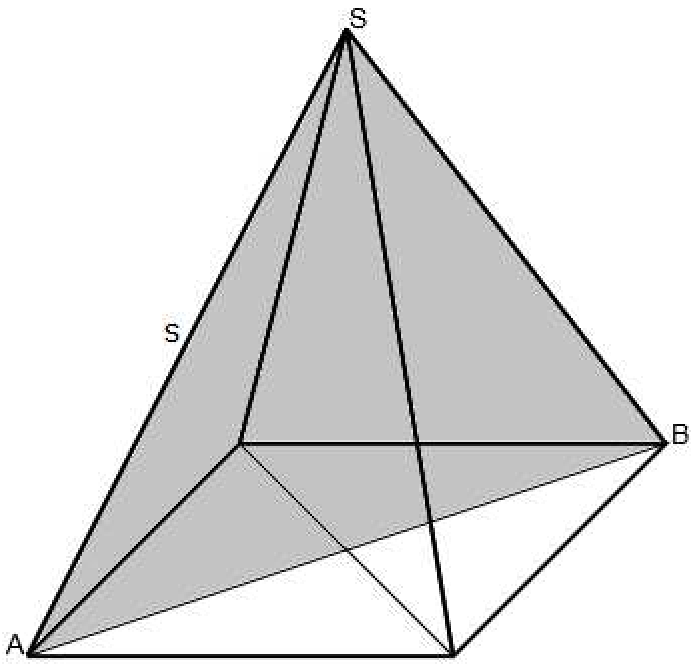
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Der Diagonalschnitt einer quadratischen Pyramide ist das gleichseitige Dreieck ΔABS mit Seitenlänge s = 12 cm. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der Pyramide.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

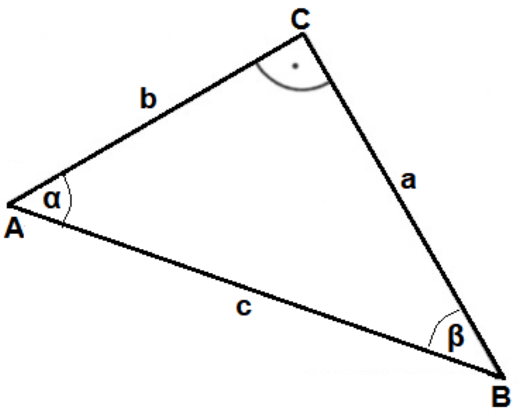
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

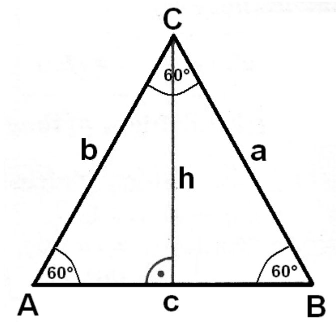
Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\ .$$

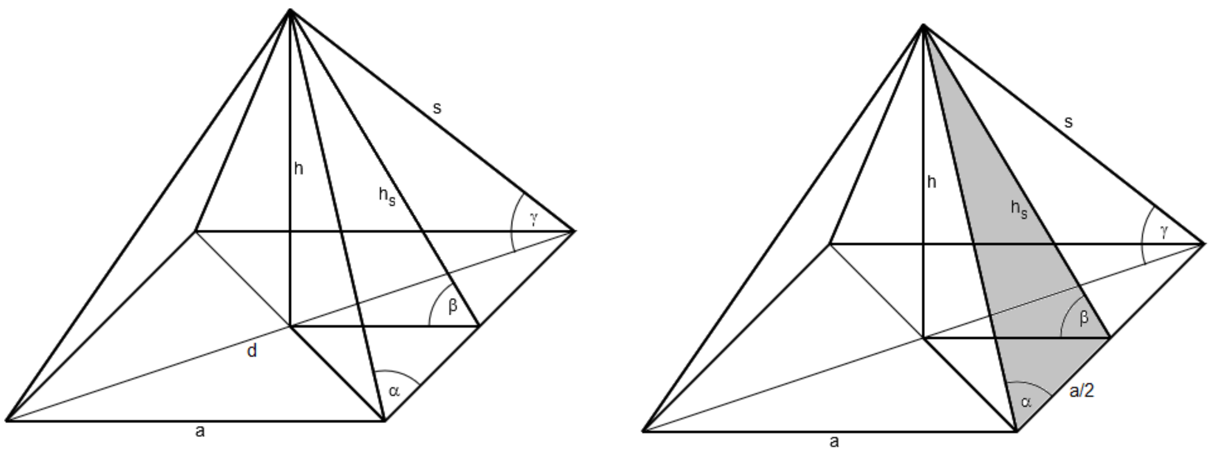


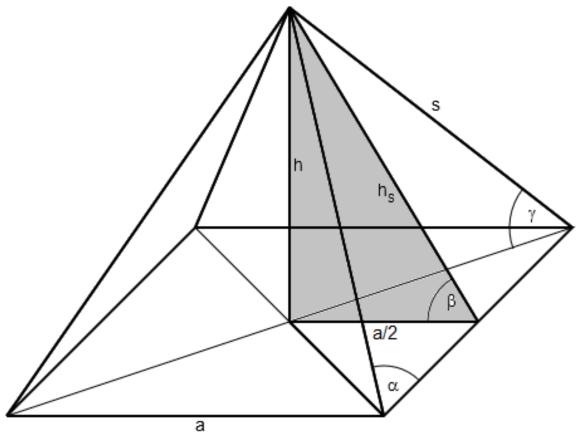
II. <u>Gleichseitige Dreiecke</u> ΔABC haben (drei) gleich lange Seiten a = b = c und gleiche Winkel α = β = γ = 60°. Für Dreieckshöhe h, Umfang u und Flächeninhalt A gilt:

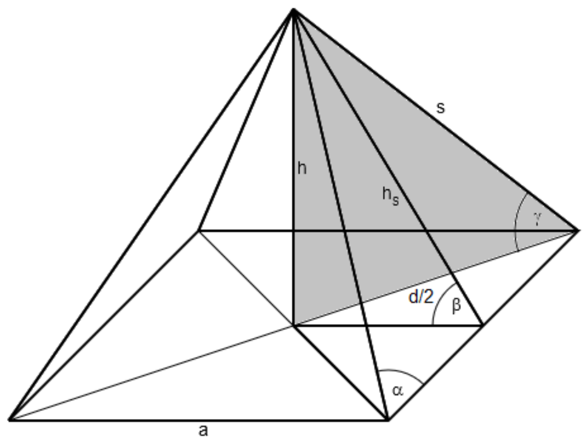
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3},\ u = 3a,\ A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ .$$



III. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.







Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a+2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

IV. Im gleichseitigen Dreieck ΔABS stellt wegen des Dreiecks als Diagonalschnitt s = 12 cm die Pyramidenseitenkante s und die Grundflächendiagonale d der Pyramide dar: s = 12 cm, d = 12 cm.

VI. Die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ist gleichzeitig die Pyramidenhöhe. Es gilt:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}\sqrt{3}$$ = 10,39 cm.

VI. Aus der Grundflächendiagonale d errechnet sich die Länge der Pyramidengrundkante a vermöge:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$ = 8,49 cm.

VII. Wegen der Grundkantenlänge a = 8,49 cm ist die Grundfläche der Pyramide G = a^2 = $8{,}49^2$ = 72,08 cm^2 groß.

VIII. Aus Grundkante a = 8,49 cm und Seitenkante s = 12 cm ergibt sich mit dem rechtwinkligen Mantelflächendreieck der Seiten a/2, h_s und s die Länge der Seitenhöhe h_s nach dem Satz des Pythagoras:

$$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 12^2 - 4{,}25^2 = 125{,}94 \Rightarrow h_s = \sqrt{125{,}94}$$ = 11,22 cm.

IX. Der Pyramidenoberflächeninhalt O = G + M bestimmt aus Grundfläche G und Mantelfläche M. Der Inhalt der Grundfläche G ist bekannt als: G = 72,08 cm^2. Für die Mantelfläche M gilt mit h_s = 11,22 cm:

M = 2ah_s = 2·8,49·11,22 = 190,52 cm^2.

Der Inhalt der Oberfläche ist mithin:

O = G + M = 72,08 + 190,52 = 262,6 cm^2.

VII. Das Pyramidenvolumen ergibt sich mit der Grundfläche G = 72,08 cm^2 und der Pyramidenhöhe h = 10,39 cm als:

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 72{,}08 \cdot 10{,}39$$ = 249,64 cm^3 ≈ 249,6 cm^3.

www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 918