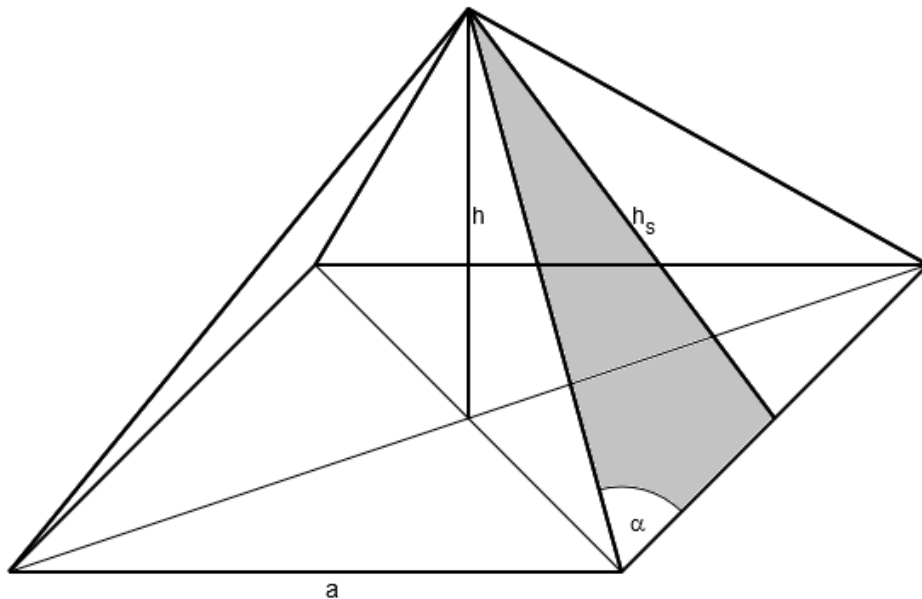


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Körperberechnung

### > Quadratische Pyramide

**Aufgabe:** Bei einer quadratischen Pyramide ist die Mantelfläche  $M = 240 \text{ cm}^2$  groß der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante beträgt  $\alpha = 59^\circ$ . Berechne den Rauminhalt und Oberfläche der Pyramide.



**Lösung:** I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

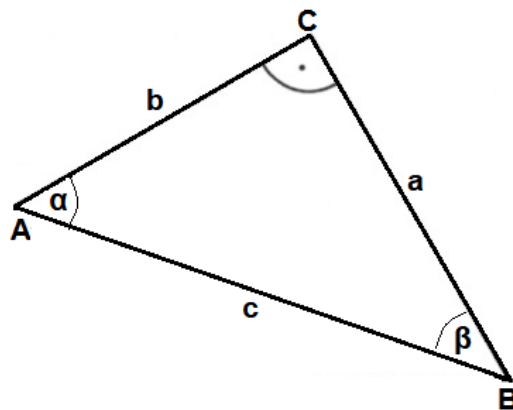
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

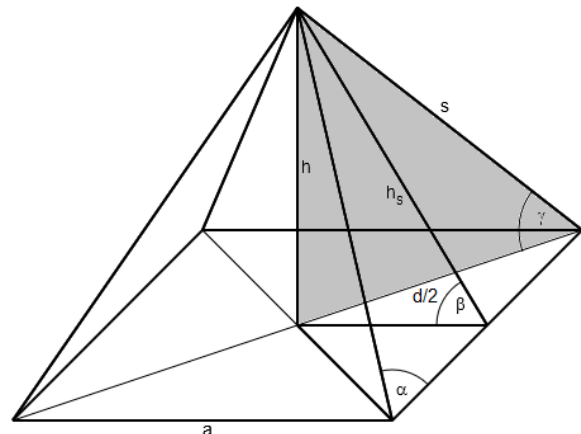
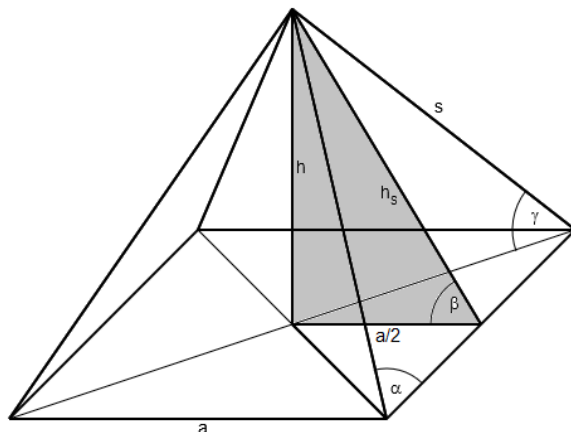
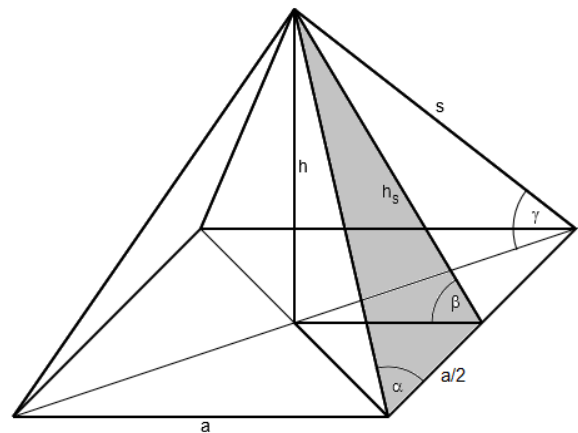
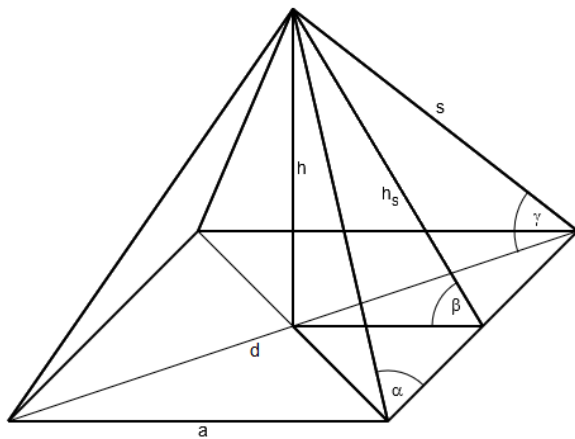
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



Wegen  $\tan \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \tan \beta$  bzw.  $\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \tan \alpha$  gelten noch die Flächenformeln:

$$A = \frac{1}{2} a^2 \tan \beta, \quad A = \frac{1}{2} b^2 \tan \alpha.$$

II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe  $h_s$ , die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

**Quadratische Pyramide**

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden- höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- kante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe $h_s$ und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- fläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

III. Wir betrachten das halbe rechtwinklige Mantelflächendreieck mit den Seiten  $a/2$ ,  $h_s$  und  $s$ . Die Fläche dieses Dreiecks ist  $A = M/8 = 240/8 = 30 \text{ cm}^2$  groß auf Grund der vorgegebenen Mantelfläche  $M = 240 \text{ cm}^2$ . Mit dem ebenfalls vorgegebenen Winkel  $\alpha = 59^\circ$  und wegen  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_s$  bei:

$$\tan \alpha = \frac{h_s}{a/2} \Rightarrow h_s = \frac{a}{2} \tan \alpha$$

folgt für die Dreiecksfläche:  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha = \frac{a^2}{8} \tan \alpha$ . Umstellen nach  $a$  ergibt:

$$A = \frac{a^2}{8} \tan \alpha \Rightarrow 8A = a^2 \tan \alpha \Rightarrow a^2 = \frac{8A}{\tan \alpha} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8A}{\tan \alpha}} = 2\sqrt{\frac{2A}{\tan \alpha}}$$

und damit wegen  $A = 30 \text{ cm}^2$ :

$$a = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 30}{\tan(59^\circ)}} = 12 \text{ cm.}$$

als Länge der Pyramidengrundkante. Mit  $h_s = \frac{a}{2} \tan \alpha$  folgt:

$$h_s = \frac{12}{2} \cdot \tan(59^\circ) = 10 \text{ cm}$$

als Seitenhöhe der Pyramide. Wir bemerken noch, dass mit dem Mantelflächendreieckswinkel  $\alpha$  und der Pyramidengrundkante  $a$  für den Inhalt der Mantelfläche  $M$  einer quadratischen Pyramide die allgemeine Formel gilt:

$$M = a^2 \tan \alpha .$$

IV. Mit der Grundkante  $a = 12 \text{ cm}$  errechnet sich die Pyramidengrundfläche als  $G = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$ .

V. Grundkante  $a = 12 \text{ cm}$  und Seitenhöhe  $h_s = 10 \text{ cm}$  ergeben noch im Paralleldreieck der Pyramide mit den Seiten  $a/2$ ,  $h$  und  $h_s$  die Pyramidenhöhe gemäß dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}.$$

VI. Für das Pyramidenvolumen folgt wegen Grundfläche  $G = 144 \text{ cm}^2$  und Höhe  $h = 8 \text{ cm}$ :

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^3.$$

VII. Für die Pyramidenoberfläche gilt wegen der vorgegebenen Mantelfläche  $M = 240 \text{ cm}^2$  und der oben errechneten Grundfläche  $G = 144 \text{ cm}^2$ :

$$O = G + M = 144 + 240 = 384 \text{ cm}^2.$$