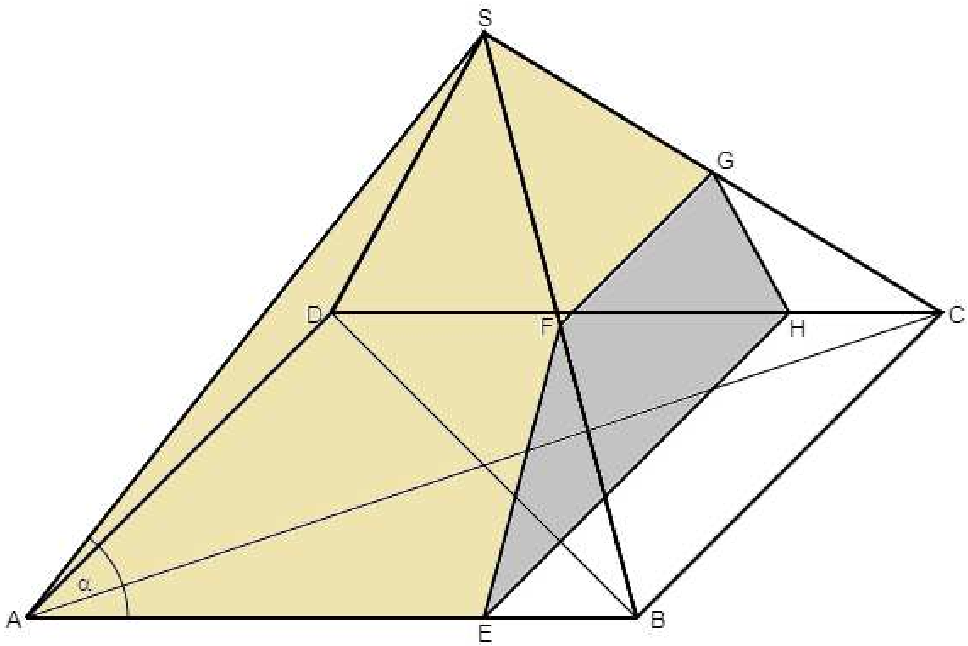
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Bei einer quadratischen Pyramide mit Grundkante a = $\overline{AB}$ = 12 cm und Winkel zwischen Seiten- und Grundkante α = 60° soll senkrecht zur Grundfläche entlang des Trapezes EFGH die Pyramide ABCDS geteilt werden. Berechne die Oberfläche des linken Pyramidenteils, wenn die Trapezeckpunkte E und F in der Mitte der Seitenkante der Pyramide liegen.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$ (Winkel α)

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$ (Winkel β)

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

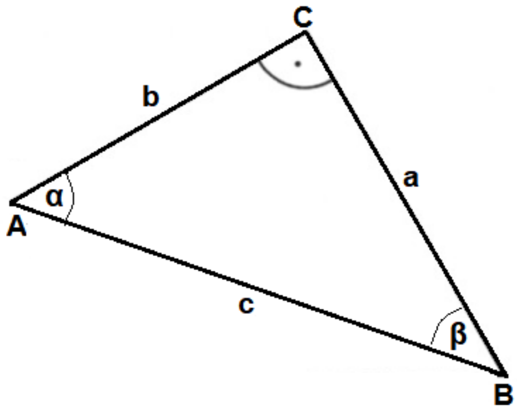
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

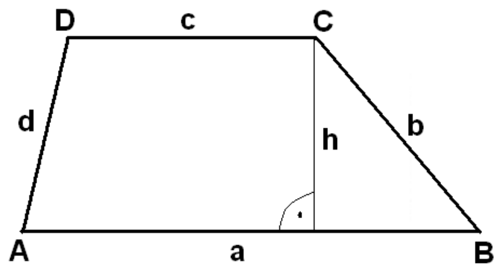
$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Für ein Trapez als Viereck ABCD mit zwei parallelen Seiten a und c sowie mit Höhe h gilt für den Umfang bzw. den Flächeninhalt:

$$u = a + b + c + d$$

$$A = \frac{a+c}{2}\cdot h.$$



Ein gleichschenkliges Trapez liegt vor, wenn b = d gilt.

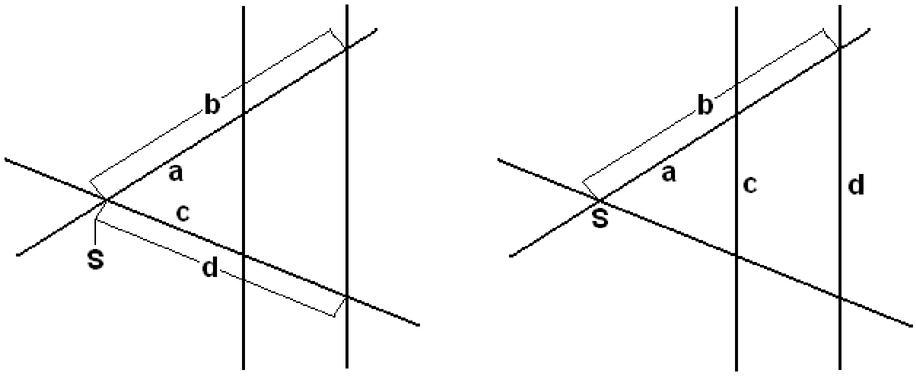
III. Zwei vom Strahlenzentrum S ausgehende Geraden werden von zwei parallelen Geraden geschnitten. Dann gilt der 1. Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem 1. sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl. Ebenso gilt der 2. Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



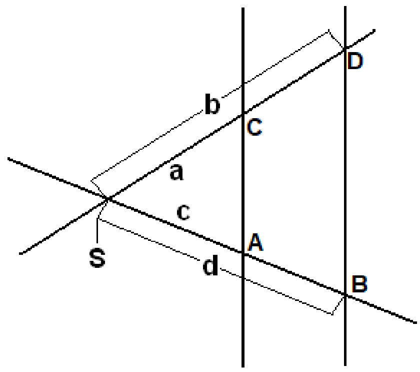
1. Strahlensatz | 2. Strahlensatz

Es gilt damit die Faustregel:

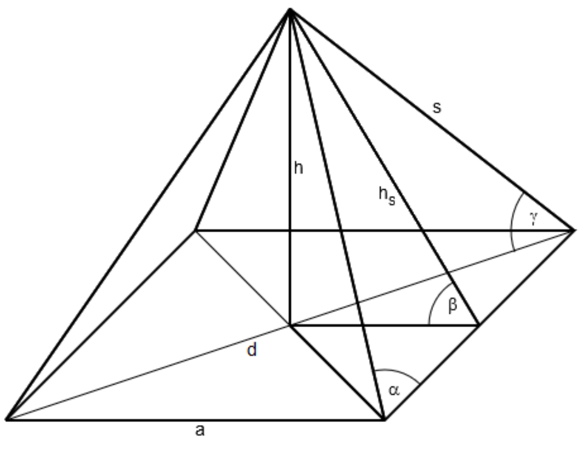
$$\frac{kurz}{lang} = \frac{kurz}{lang} \text{ bzw. } \frac{lang}{kurz} = \frac{lang}{kurz}.$$

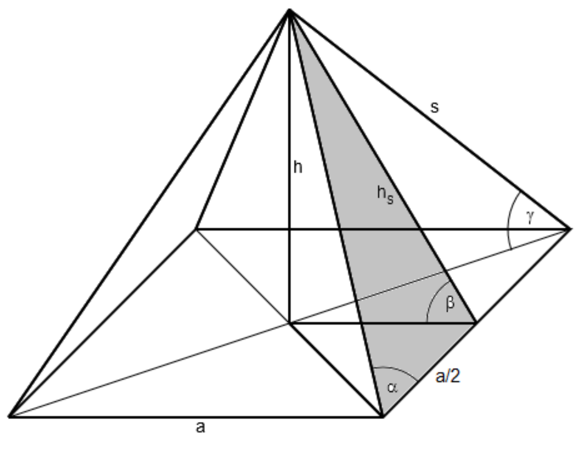
Ist gemäß dem 1. Strahlensatz der Streckfaktor k = $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ gegeben, so gilt für die Flächeninhalte der zugehörigen Dreiecke SAC und SBD:

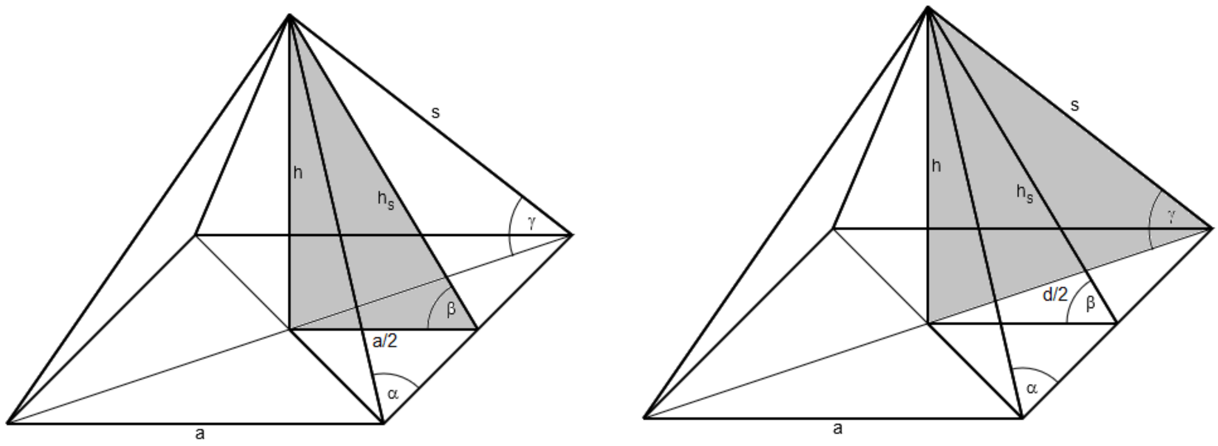
$$A_{SBD} = k^2 A_{SAC}.$$



IV. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.







Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

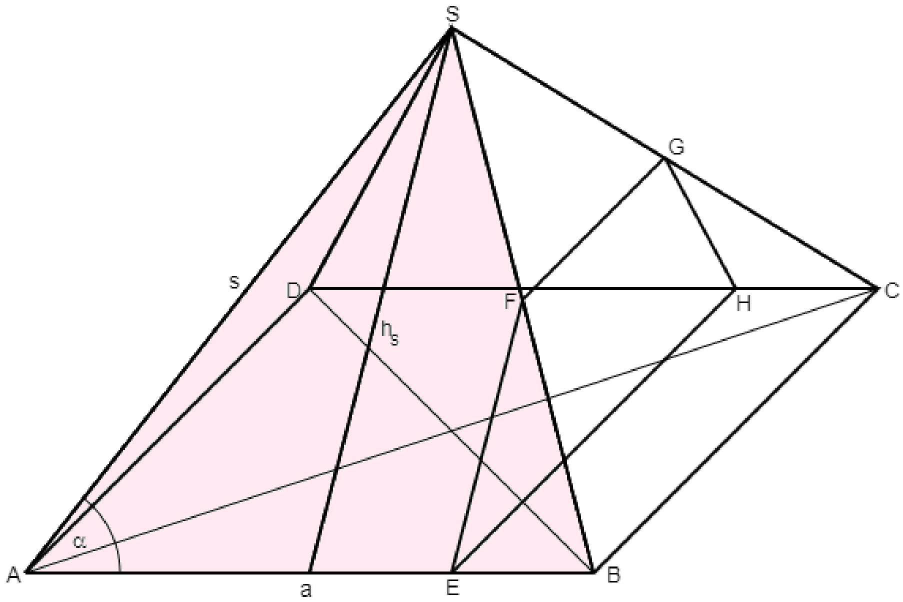
Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

V. Wir betrachten das vordere Mantelflächendreieck ABS, das als gleichschenkliges Dreieck durch die Seitenhöhe der Pyramide h_s in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt wird. Mit a/2 = 12:2 = 6 cm und Winkel α = 60° gilt:

$$\tan\alpha = \frac{h_s}{a/2} \Rightarrow h_s = \frac{a}{2}\tan\alpha$$ = 6·tan(60°) = 10,4 cm

$$\sin\alpha = \frac{h_s}{s} \Rightarrow s = \frac{h_s}{\sin\alpha}$$ = 10,4:sin(60°) = 12 cm.



VI. Im Mantelflächendreieck ABS wenden wir nun die Strahlensätze an. Es ist wegen F als Mitte zwischen B und S:

$$\frac{1}{2} = \frac{s/2}{s} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{BE}}{a/2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{6} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{6}{2} = 3$$ cm (gemäß 1. Strahlensatz)

$$\frac{1}{2} = \frac{s/2}{s} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{EF}}{h_s} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{EF}}{10{,}4} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{10{,}4}{2} = 5{,}2$$ cm (gemäß 2. Strahlensatz).

VII. Wir betrachten nun das Trapez EFGH. Im Mantelflächendreieck BCS ist wegen F und G als Mitten der Seitenkanten der Pyramide:

$$\frac{1}{2} = \frac{s/2}{s} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{FG}}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{FG}}{12} \Rightarrow \overline{FG} = \frac{12}{2} = 6$$ cm (gemäß 2. Strahlensatz).

Zudem ist, wie wir sofort sehen:

$\overline{EH} = \overline{BC} = a = 12$ cm.

Das Trapez EFGH ist gleichschenklig. Daher gilt:

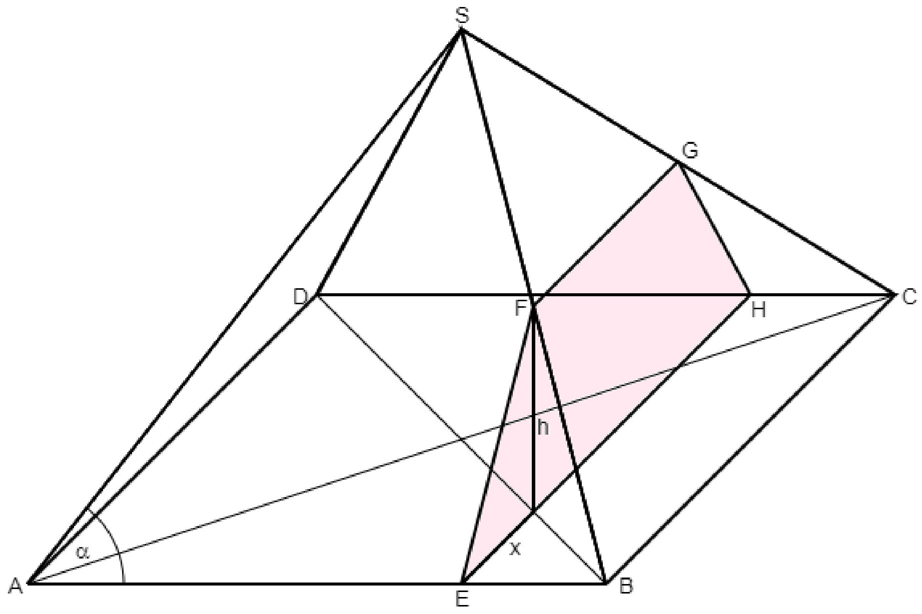
$12 = \overline{EH} = \overline{FG} + 2x = 6 + 2x$ => 6 = 2x => x = 3 cm.

Es ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras die Trapezhöhe h als:

$h^2 = \overline{EF}^2 - x^2 = 5{,}2^2 - 3^2 = 18{,}04$ => h = 4,25 cm

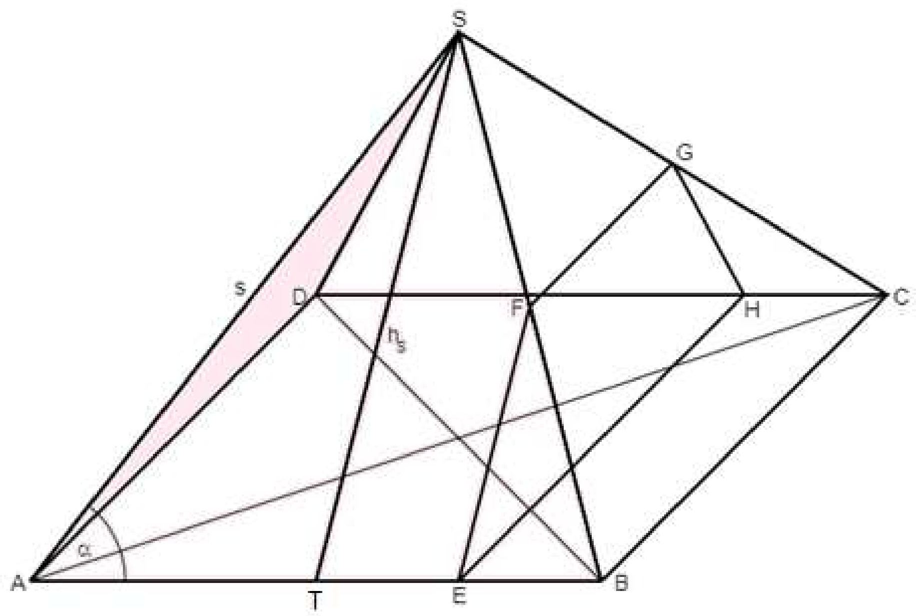
(was übrigens – ebenfalls nach den Strahlensätzen – die halbe Pyramidenhöhe 8,5 cm ist). Der Flächeninhalt des Trapezes ist dann:

$$A_{EFGH} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{12+6}{2} \cdot 4{,}25 = 9 \cdot 4{,}25 = 38{,}25 \text{ cm}^2.$$



VII. Wir berechnen die weiteren Flächeninhalte, die zur Oberfläche des linken Pyramidenteils beitragen. Für die Mantelfläche ADS gilt:

$A_{ADS} = \frac{1}{2} a h_s = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10{,}4 = 62{,}4$ cm^2.



VIII. Die Viereckflächen AEFS und DHGS haben denselben Flächeninhalt, der sich im Fall des Vierecks AEFS auf Grund der aus dem 1. Strahlensatz resultierenden Flächenbeziehung:

$A_{BST} = k^2 A_{BEF}$

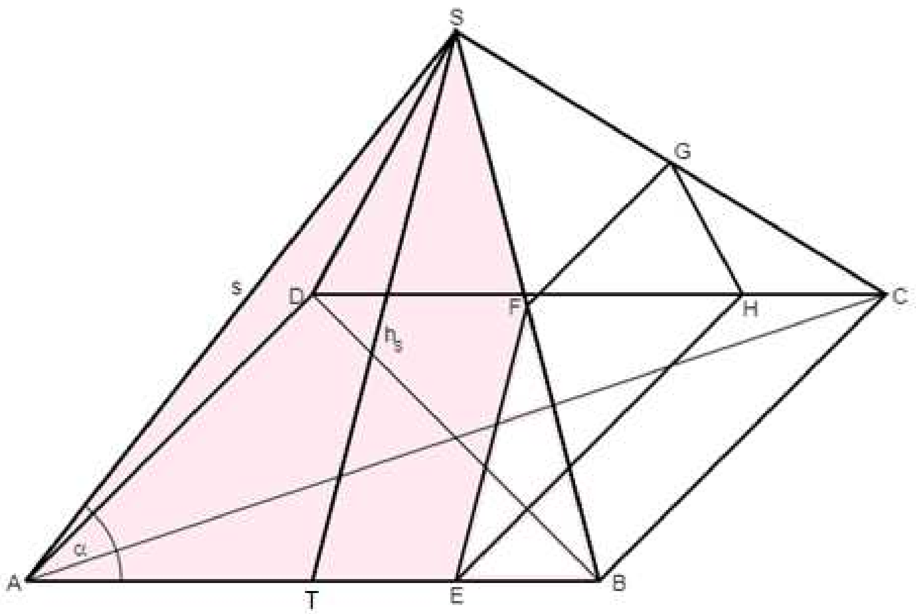
bei k = 2 und mit $A_{BST} = 0{,}5 \cdot A_{ADS} = 0{,}5 \cdot 62{,}4 = 31{,}2$ cm^2 errechnet mit:

$31{,}2 = A_{BST} = 2^2 A_{BEF} = 4 A_{BEF}$ => $A_{BEF} = 31{,}2 : 4 = 7{,}8$ cm^2

$A_{AEFS} = A_{ADS} - A_{BEF} = 62{,}4 - 7{,}8 = 54{,}6$ cm^2.

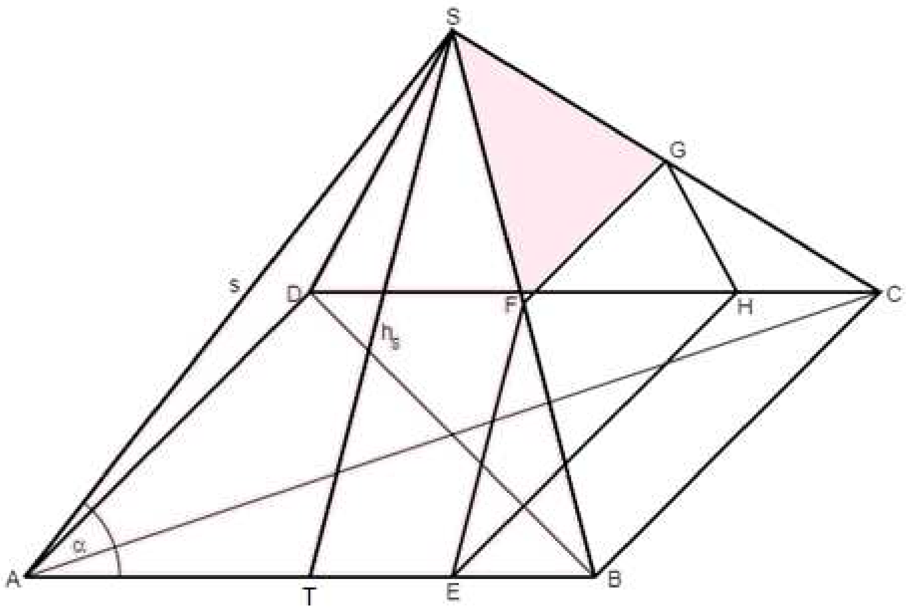
Damit betragen die Inhalte der beiden Viereckflächen:

$A_{AEFS} = A_{DHGS} = 54{,}6$ cm².



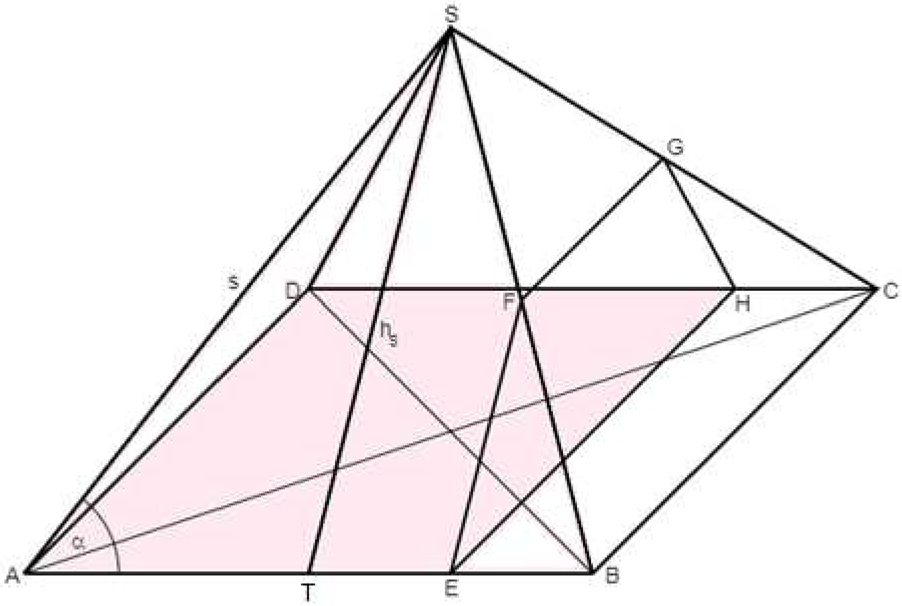
IX. Der Flächeninhalt des Dreiecks FGS ist ebenfalls nach der aus dem 1. Strahlensatz resultierenden Flächenbeziehung bei k = 2:

$A_{FGS} = \frac{1}{4} A_{BCS} = \frac{1}{4} A_{ADS} = \frac{1}{4} \cdot 62{,}4 = 15{,}6$ cm².



X. Damit sind alle Flächen als Teil des Mantels des linken Pyramidenteils bestimmt. Es fehlt noch der relevante Teil der Grundfläche als Rechteck AEHD mit Länge $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = 12 - 3 = 9$ cm und Breite $\overline{EH} = 12$ cm. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist:

$A_{AEHD} = \overline{AE} \cdot \overline{EH} = 9 \cdot 12 = 108$ cm².



XI. Die <u>Oberfläche</u> des linken Pyramidenteils AEHDFGS hat damit als (Ober-) Flächeninhalt:
$O = A_{AEHD} + A_{ADS} + 2 \cdot A_{AEFS} + A_{FGS} + A_{EFGH} = 108 + 62{,}4 + 2 \cdot 54{,}6 + 15{,}6 + 38{,}25 = 333{,}45 \text{ cm}^2$.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1365