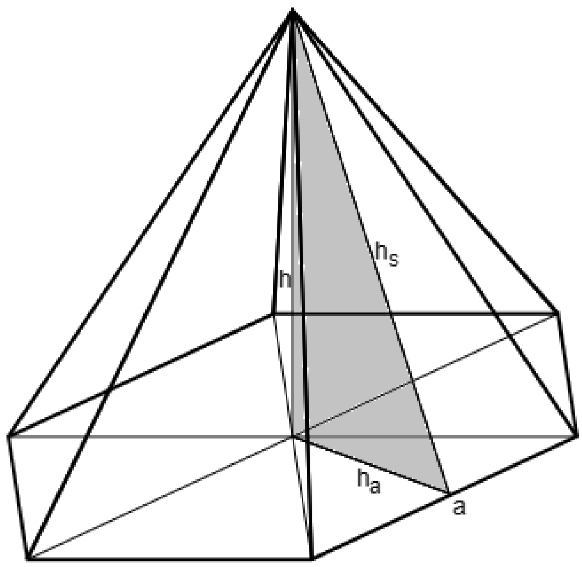
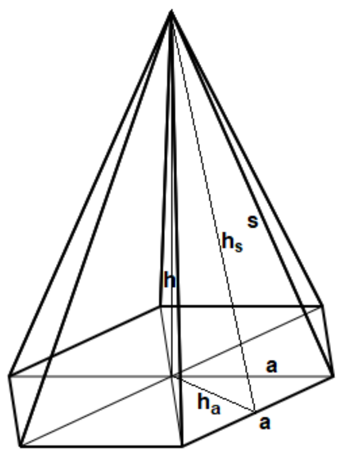
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Sechseckpyramide

Aufgabe: Das Höhendreieck einer regelmäßigen Sechseckpyramide besitzt die Hypotenuse h_s = 13,9 cm und die Kathete h_a = 6,9 cm. Berechne den Oberflächeninhalt O und das Volumen V der Pyramide.



Lösung: I. Eine (gerade) Pyramide mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 60°, Seiten a, Grundflächenradius r und Höhe h_a.



Regelmäßige Sechseckpyramide: Grundkante a, Höhe h_a, Radius a des Grundflächendreiecks, Höhe h, Seitenhöhe h_s, Seitenkante s, Mantelfläche M, Volumen V

Sechseckpyramide:

Gleichseitiges Grundflächendreieck	$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h_a$	$A_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$r = a$
Grundfläche aus sechs Dreiecken	$G = 3ah_a = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$	$h_a = \frac{G}{3a}$	$a = \frac{G}{3h_a} = \sqrt{\frac{2G}{3\sqrt{3}}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$	

Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + a^2$	$h^2 = s^2 - a^2$	$a^2 = s^2 - h^2$
Mantelflächendreieck	$A_\Delta = \frac{1}{2} a h_s$	$a = \frac{2A_\Delta}{h_s}$	$h_s = \frac{2A_\Delta}{a}$
Mantelfläche aus sechs Dreiecken	$M = 3ah_s$	$h_s = \frac{M}{3a}$	$a = \frac{M}{3h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2h_s)$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{a^2}{2} h\sqrt{3}$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G} = \frac{2V}{a^2\sqrt{3}}$

III. Wir betrachten zunächst das Höhendreieck der Pyramide und haben auf Grund des Satzes des Pythagoras aus Hypotenuse h_s = 13,9 cm und Kathete h_a = 6,9 cm die Pyramidenhöhe h zu berechnen. Es gilt::

$h^2 = h_s^2 - h_a^2 = 13{,}9^2 - 6{,}9^2 = 145{,}6 \Rightarrow h = \sqrt{145{,}6}$ = 12,07 cm.

IV. In einem gleichseitigen Grundflächendreieck folgt die Grundkantenlänge a der Pyramide aus der vorgegebenen Höhe h_a = 6,9 cm des Dreiecks:

$a = \frac{2}{\sqrt{3}} h_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6{,}9$ = 7,96 cm.

V. Für den Grundflächeninhalt G der Pyramide gilt mit Grundkante a = 7,96 cm und Höhe h_a = 6,9 cm des Dreiecks:

G = $3a \cdot h_a$ = 3·7,96·6,9 = 164,77 cm^2.

VI. Für den Mantelflächeninhalt M der Pyramide folgt mit Grundkante a = 7,96 cm und Seitenhöhe h_s = 13,9 cm:

M = $3a \cdot h_s$ = 3·7,96·13,9 = 331,93 cm^2.

VII. Der Oberflächeninhalt O der Pyramide ergibt sich aus Grundflächen- und Mantelflächeninhalt G = 164,77 cm^2 bzw. M = 331,93 cm^2 gemäß:

O = G + M = 164,77 + 331,93 = 496,7 cm^2.

VIII. Das Volumen V der Pyramide errechnet sich schließlich:

V = $\frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 164{,}77 \cdot 12{,}07$ = 662,9 cm^3.

www.michael-buhlmann.de / 09.2023 / Aufgabe 1892