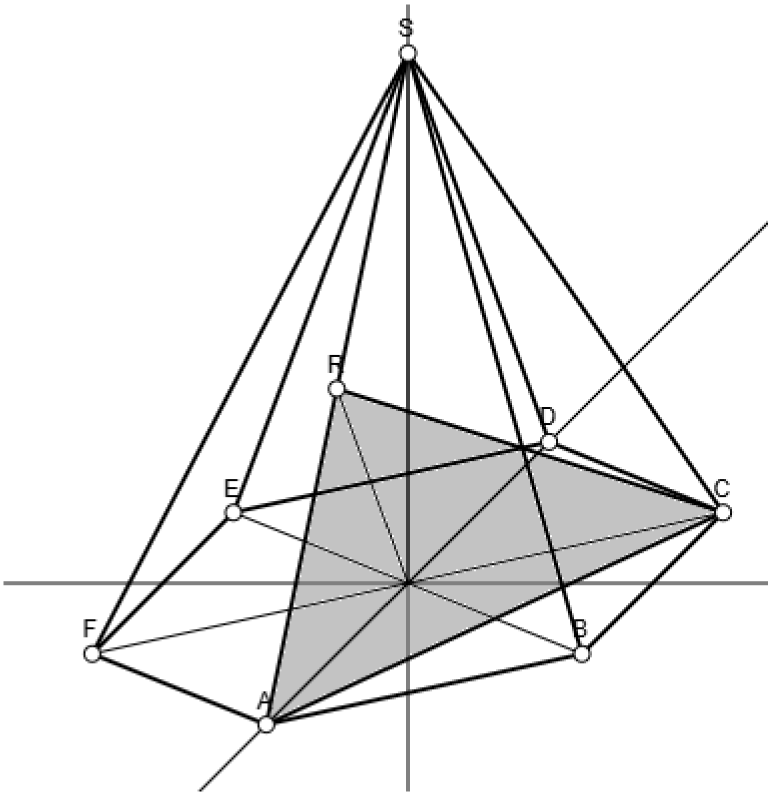
**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Geometrie/Körperberechnung
## > Sechseckpyramide

---

**Aufgabe**: Die regelmäßige Sechseckpyramide hat die Grundkantenlänge a = 8 cm und die Höhe h = 15 cm. Der Punkt R ist die Mitte der Pyramidenseitenkante.



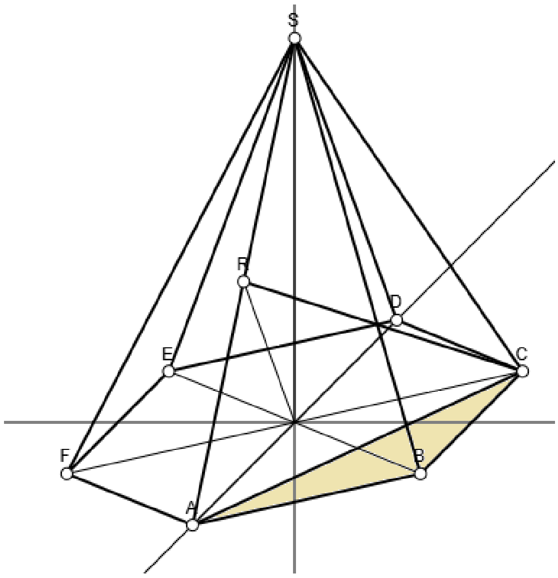

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔACR.

**1. Lösung**: I. Nach Aufgabenstellung liegt eine regelmäßige Sechseckpyramide mit Grundkante a = 8 cm und Höhe h = 15 cm vor. Die Seitenkante s der Pyramide errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus Pyramidengrundkante a und -höhe h gemäß:

$s^2 = a^2 + h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow s = \sqrt{289} = 17$ cm.

Daher ist mit R als Mittelpunkt der Seitenkante $\overline{AR} = \frac{s}{2} = \frac{17}{2}$ = 8,5 cm eine Seite des Dreiecks ΔACR.

II. Zur Ermittlung der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ΔACR betrachten wir die Grundfläche ABCDEF als regelmäßiges Sechseck.

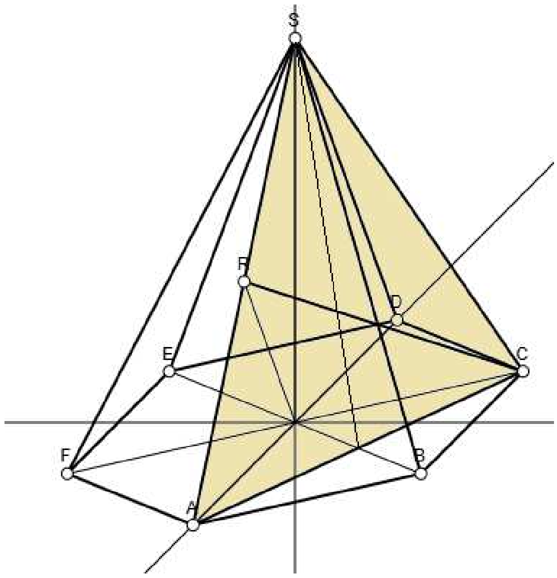



Das Teildreieck ΔABC der Grundfläche ABCDEF ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$ = 8 cm und dem Sechseckaußenwinkel β = 180° – 60° = 120°. Die von der Ecke B ausgehende Höhe $h_B$ halbiert das gleichschenklige Dreieck ΔABC, es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke etwa mit $\overline{AB}$ = 8 cm als Hypotenuse, $h_B$ und $\overline{AC}$ /2 als Katheten sowie dem Winkel β/2 = 60°. Es ist somit:

$$\sin 60° = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{8} = \frac{\overline{AC}}{16} \Rightarrow \overline{AC} = 16 \cdot \sin 60° = 16 \cdot 0{,}866 = 13{,}86 \text{ cm},$$

womit die zweite Seite im Dreieck ΔACR berechnet wurde.

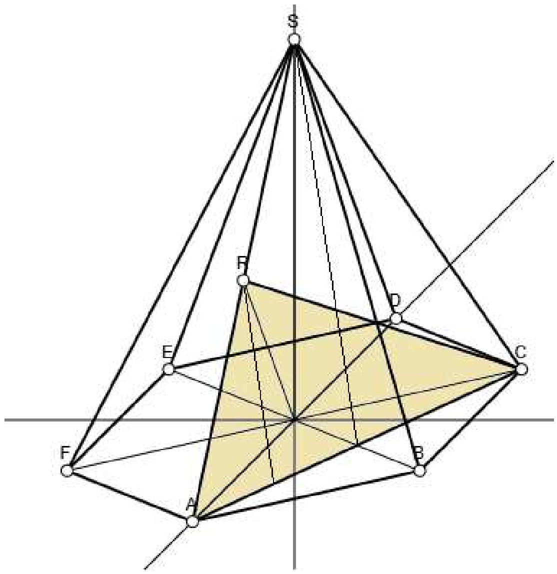
III. Zur Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔACR fehlt noch die vom Punkt R ausgehende Höhe $h_R$ auf die Seite $\overline{AC}$ . Dazu wird zunächst das Dreieck ΔACS ausgewertet.




Das Dreieck ΔACS ist gleichschenklig, die von der Pyramidenspitze S ausgehende Höhe $h_1$ halbiert das Dreieck, im rechtwinkligen Dreieck aus Hypotenuse s, Kathete $\overline{AC}$ /2 und Kathete $h_1$ errechnet sich $h_1$ nach dem Satz des Pythagoras als:

$$h_1^2 = s^2 - \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = 17^2 - 6{,}93^2 = 240{,}98 \Rightarrow h_1 = \sqrt{240{,}98} = 15{,}52 \text{ cm}.$$

IV. Mit der Höhe $h_1$ des Dreiecks ΔACS lässt sich nun die Höhe $h_R$ des Dreiecks ΔACR bestimmen.



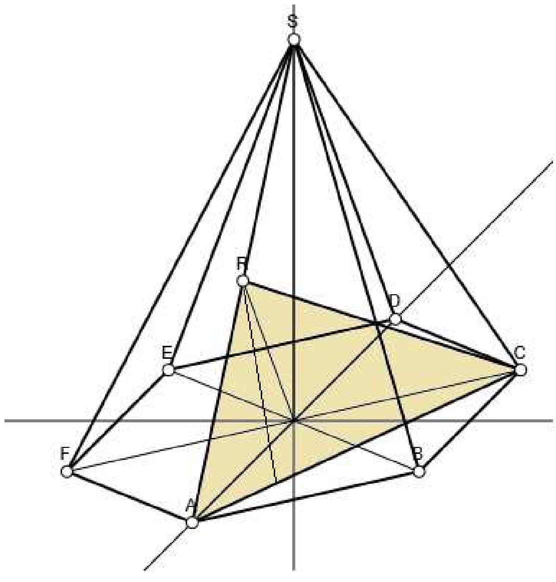

Es gilt nach dem 2. Strahlensatz, angewendet auf den Strahl $\overline{AS}$ mit kurzer Strecke s/2 und langer Strecke s sowie auf die Parallelen $h_R$ und $h_1$ als kurze und lange Parallele:

$$\frac{\frac{s}{2}}{s} = \frac{h_R}{h_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_R}{15{,}52} \Rightarrow h_R = \frac{15{,}52}{2} = 7{,}76 \text{ cm.}$$

Damit ist die <u>Höhe</u> $h_R$ des Dreiecks ΔACR als $h_R$ = 7,76 cm berechnet.

V. Der gesuchte <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔACR bestimmt sich vermöge der Formel $A_\Delta = gh/2$ mit der Grundseite $\overline{AC}$ = 13,86 cm und der Höhe $h_R$ = 7,76 cm:

$$A_{\Delta ACR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_R = \frac{1}{2} \cdot 13{,}86 \cdot 7{,}76 = 53{,}78 \text{ cm}^2.$$

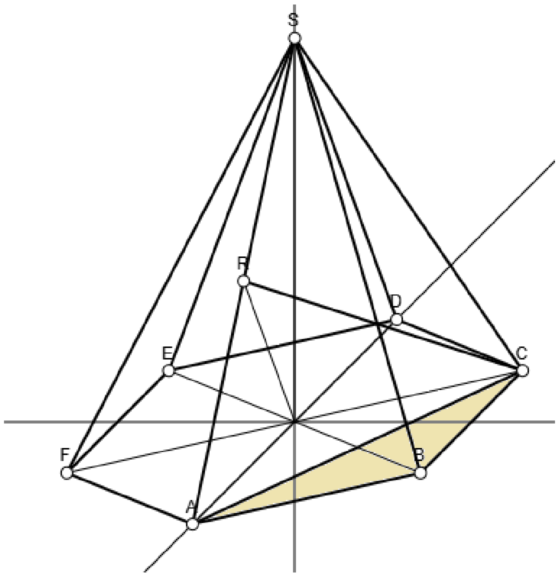



**2. Lösung**: I. Nach Aufgabenstellung liegt eine regelmäßige Sechseckpyramide mit Grundkante a = 8 cm und Höhe h = 15 cm vor. Die Seitenkante s der Pyramide errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus Pyramidengrundkante a und -höhe h gemäß:

$$s^2 = a^2 + h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow s = \sqrt{289} = 17 \text{ cm.}$$

Daher ist mit R als Mittelpunkt der Seitenkante $\overline{AR} = \frac{s}{2} = \frac{17}{2}$ = 8,5 cm eine Seite des Dreiecks ΔACR.

II. Zur Ermittlung der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ΔACR betrachten wir die Grundfläche ABCDEF als regelmäßiges Sechseck.

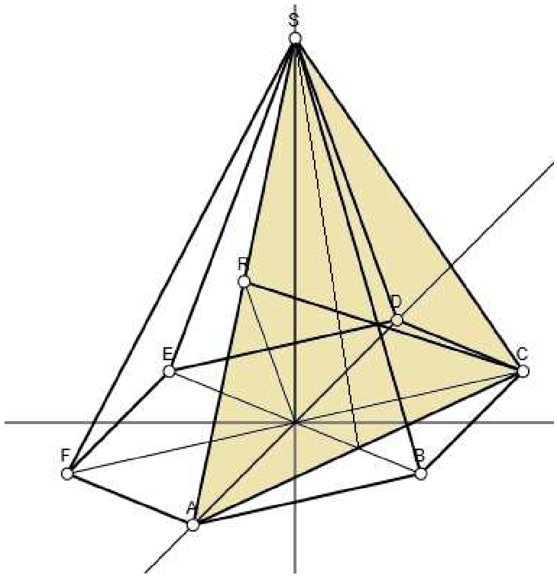



Das Teildreieck ΔABC der Grundfläche ABCDEF ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$ = 8 cm und dem Sechseckaußenwinkel β = 180° – 60° = 120°. Die von der Ecke B ausgehende Höhe $h_B$ halbiert das gleichschenklige Dreieck ΔABC, es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke etwa mit $\overline{AB}$ = 8 cm als Hypotenuse, $h_B$ und $\overline{AC}$ /2 als Katheten sowie dem Winkel β/2 = 60°. Es ist somit:

$$\sin 60° = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{8} = \frac{\overline{AC}}{16} \Rightarrow \overline{AC} = 16 \cdot \sin 60° = 16 \cdot 0{,}866 = 13{,}86 \text{ cm},$$

womit die zweite Seite im Dreieck ΔACR berechnet wurde.

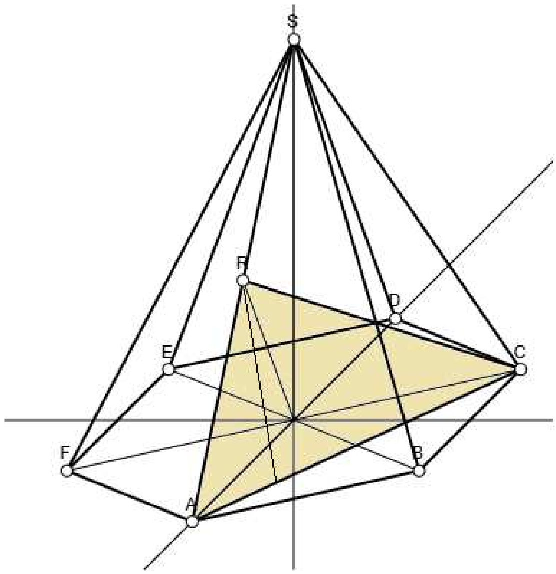
III. Zur Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔACR fehlt noch die vom Punkt R ausgehende Höhe $h_R$ auf die Seite $\overline{AC}$ . Dazu wird zunächst das Dreieck ΔACS ausgewertet.




Das Dreieck ΔACS ist gleichschenklig, die von der Pyramidenspitze S ausgehende Höhe $h_1$ halbiert das Dreieck, im rechtwinkligen Dreieck aus Hypotenuse s, Kathete $\overline{AC}$ /2 und Kathete $h_1$ errechnet sich der Winkel α an der Pyramidenecke A als:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{s} = \frac{\frac{13{,}86}{2}}{17} = \frac{6{,}93}{17} = 0{,}408 \Rightarrow \alpha = 65{,}94°.$$

IV. Mit dem Winkel α im Dreieck ΔACS lässt sich nun die Höhe $h_R$ des Dreiecks ΔACR bestimmen.




Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{h_R}{\frac{s}{2}} \Rightarrow \sin 65{,}94° = \frac{h_R}{8{,}5} \Rightarrow h_R = 8{,}5 \cdot \sin 65{,}94° = 7{,}76 \text{ cm.}$$

Damit ist die <u>Höhe</u> $h_R$ des Dreiecks ΔACR als $h_R$ = 7,76 cm berechnet.

V. Der gesuchte <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔACR bestimmt sich vermöge der Formel $A_\Delta$ = gh/2 mit der Grundseite $\overline{AC}$ = 13,86 cm und der Höhe $h_R$ = 7,76 cm:

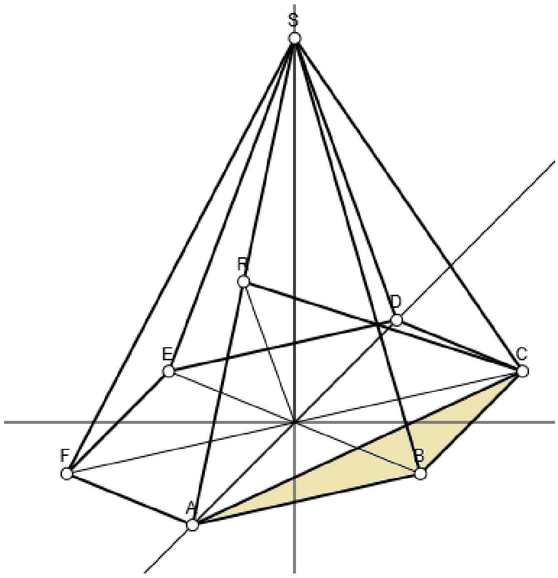
$$A_{\Delta ACR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_R = \frac{1}{2} \cdot 13{,}86 \cdot 7{,}76 = 53{,}78 \text{ cm}^2.$$

**3. Lösung**: I. Nach Aufgabenstellung liegt eine regelmäßige Sechseckpyramide mit Grundkante a = 8 cm und Höhe h = 15 cm vor. Die Seitenkante s der Pyramide errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus Pyramidengrundkante a und -höhe h gemäß:

$$s^2 = a^2 + h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow s = \sqrt{289} = 17 \text{ cm.}$$

Daher ist mit R als Mittelpunkt der Seitenkante $\overline{AR} = \frac{s}{2} = \frac{17}{2}$ = 8,5 cm eine <u>Seite</u> des Dreiecks ΔACR.

II. Zur Ermittlung der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ΔACR betrachten wir die Grundfläche ABCDEF als regelmäßiges Sechseck.

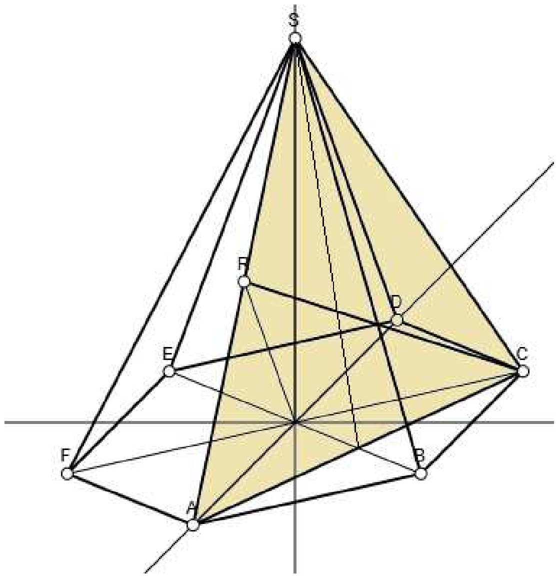



Das Teildreieck ΔABC der Grundfläche ABCDEF ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$ = 8 cm und dem Sechseckaußenwinkel β = 180° – 60° = 120°. Die von der Ecke B ausgehende Höhe $h_B$ halbiert das gleichschenklige Dreieck ΔABC, es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke etwa mit $\overline{AB}$ = 8 cm als Hypotenuse, $h_B$ und $\overline{AC}$ /2 als Katheten sowie dem Winkel β/2 = 60°. Es ist somit:

$$\sin 60° = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{8} = \frac{\overline{AC}}{16} \Rightarrow \overline{AC} = 16 \cdot \sin 60° = 16 \cdot 0{,}866 = 13{,}86 \text{ cm},$$

womit die zweite <u>Seite</u> im Dreieck ΔACR berechnet wurde.

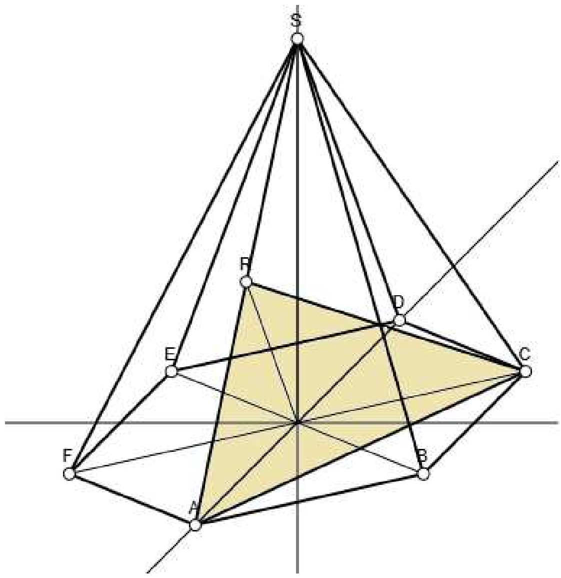
III. Das Dreieck ΔACR ist ein allgemeines Dreieck mit den Seiten $\overline{AR}$ = 8,5 cm und $\overline{AC}$ = 13,86 cm. Der zwischen den beiden Seiten gelegene Winkel α an der Pyramidenecke A soll nun errechnet werden. Dazu wird das Dreieck ΔACS ausgewertet.




Das Dreieck ΔACS ist gleichschenklig, die von der Pyramidenspitze S ausgehende Höhe $h_1$ halbiert das Dreieck, im rechtwinkligen Dreieck aus Hypotenuse s, Kathete $\overline{AC}$ /2 und Kathete $h_1$ folgt für den <u>Winkel</u> α:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{s} = \frac{\frac{13{,}86}{2}}{17} = \frac{6{,}93}{17} = 0{,}408 \Rightarrow \alpha = 65{,}94°.$$

IV. Mit dem Winkel α und den Seiten $\overline{AR}$ = 8,5 cm und $\overline{AC}$ = 13,86 cm lässt sich der Flächeninhalt des Dreiecks ΔACR bestimmen.




Der gesuchte Flächeninhalt errechnet sich als Produkt der beiden Seitenlängen mal dem Sinus des zwischen den Seiten gelegenen Winkels, d.h. mit den Seiten $\overline{AR}$ = 8,5 cm und $\overline{AC}$ = 13,86 cm sowie dem Winkel α = 65,94° als:

$$A_{\Delta ACR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AR} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5 \cdot 13{,}86 \cdot \sin 65{,}94° = 53{,}78 \text{ cm}^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2100