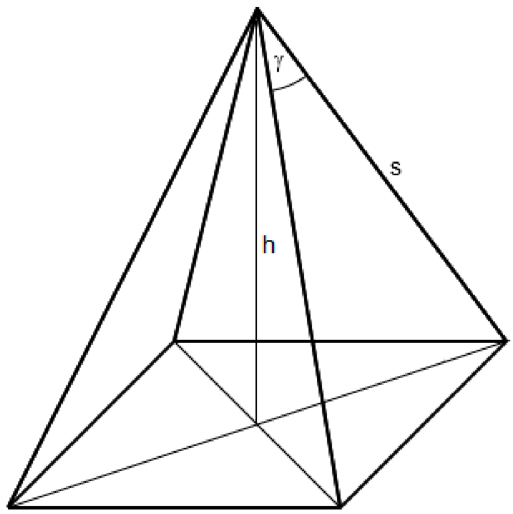
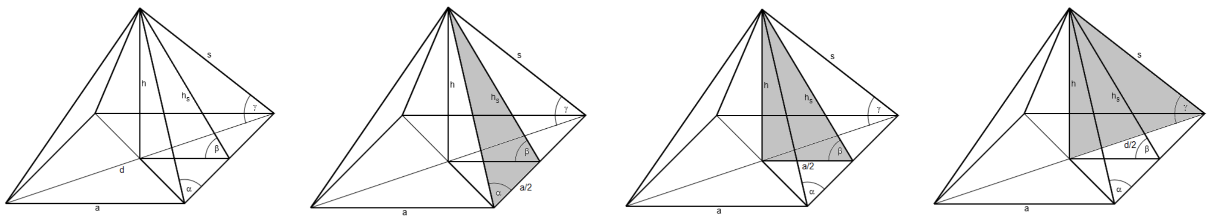
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt: die Grundkante a = 11,2 cm, die Pyramidenhöhe h = 14,2 cm. Berechne den Winkel γ an der Pyramidenspitze des Mantelflächendreiecks.



Lösung: I. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$

Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

II. Wir betrachten das rechtwinklige Paralleldreieck in der Pyramide, das durch die Seitenhöhe h_s, die halbe Grundkante $a/2 = 11{,}2/2 = 5{,}6$ cm und die Pyramidenhöhe $h = 14{,}2$ cm begrenzt wird. Wir berechnen nach dem Satz des Pythagoras die Seitenhöhe h_s der Pyramide:

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 14{,}2^2 + 5{,}6^2 = 233 \Rightarrow h_s = \sqrt{233} = 15{,}26 \text{ cm.}$$

III. Im gleichschenkligen Oberflächendreieck aus der Grundkante a und den zwei Seitenkanten s ist der Winkel an der Spitze der Winkel γ. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit dem Winkel γ/2, der Hypotenuse s und den Katheten a/2 und h_s. Da $a/2 = 5{,}6$ cm und $h_s = 15{,}26$ cm bekannt sind, lässt sich der Winkel γ/2 mit Hilfe des Tangens berechnen:

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h_s} \Rightarrow \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{5{,}6}{15{,}26} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \tan^{-1}(0{,}3669) = 20{,}1°.$$

IV. Der gesuchte Winkel γ hat die Weite:

γ/2 = 20,1° => γ = 40,2°.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2267