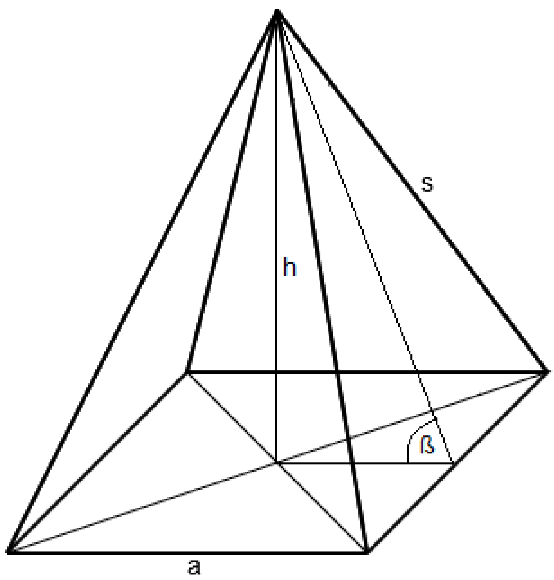
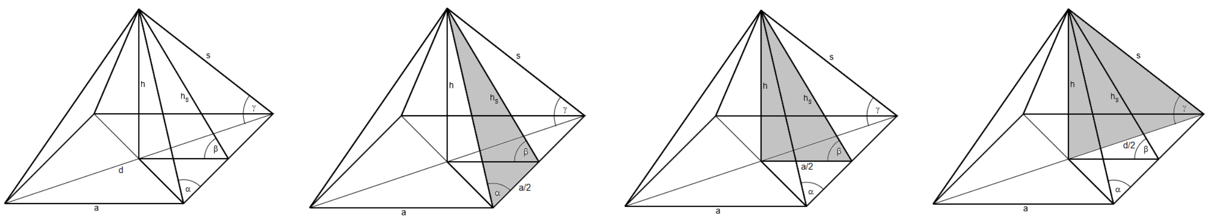
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt: die Diagonale d = 15,6 cm der Grundfläche, die Seitenkante s = 16,3 cm. Berechne den Winkel β zwischen Seitenhöhe und Grundfläche.



Lösung: I. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$

Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

II. Wir betrachten die quadratische Grundfläche und deren Diagonale d = 15,6 cm. Die Seitenlänge a des Quadrats ist die Grundkante der Pyramide und bestimmt sich als:

$d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{15{,}6}{\sqrt{2}}$ = 11,03 cm.

III. Z.B. im Oberflächendreieck aus der Seitenkante s = 16,3 cm als Hypotenuse und halber Grundkante a/2 = 5,52 und Seitenhöhe h_s als Katheten berechnet sich die Seitenhöhe nach dem Satz des Pythagoras:

$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_s^2 = 16{,}3^2 - 5{,}52^2 = 235{,}22 \Rightarrow h_s = \sqrt{235{,}22}$ = 15,34 cm.

IV. Im Paralleldreieck aus der Seitenhöhe h_s = 15,34 cm als Hypotenuse und halber Grundkante a/2 = 5,52 und Pyramidenhöhe h als Katheten berechnen wir den gesuchten Winkel β mit Hilfe des Kosinus:

$\cos\beta = \frac{a}{2h_s} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5{,}52}{15{,}34} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(\frac{5{,}52}{15{,}34})$ = 68,9°.

Damit ist die Weite des Winkels β bestimmt.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2268