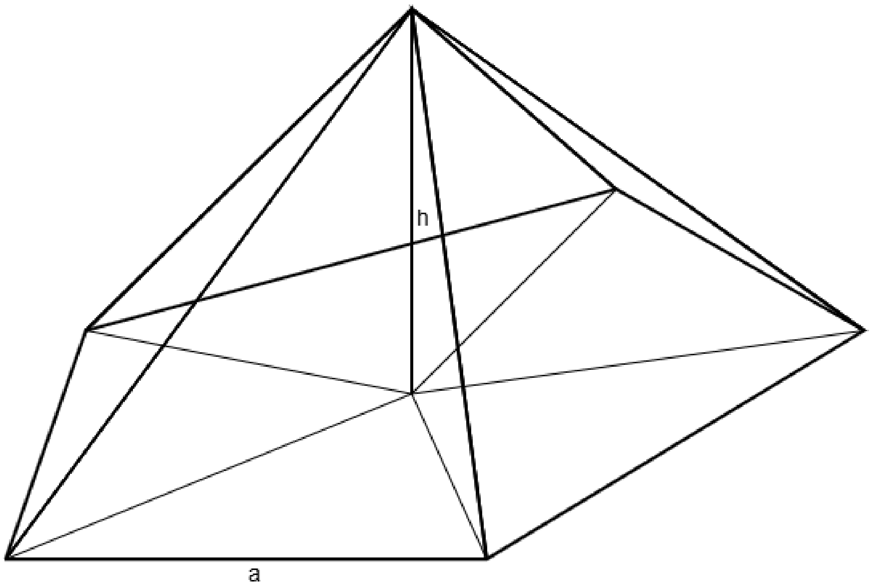
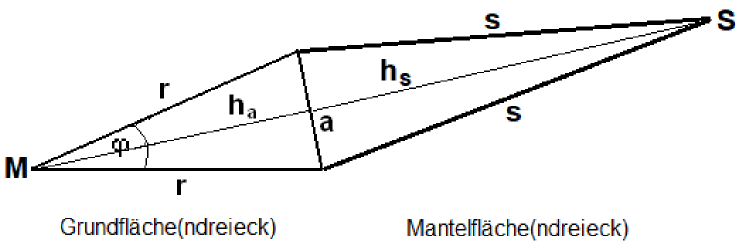
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Fünfeckpyramide

Aufgabe: Von einer regelmäßigen Fünfeckpyramide sind bekannt: der Oberflächeninhalt O = 435,9 cm^2 sowie der Mantelflächeninhalt M = 263,8 cm^2. Berechne das Volumen der Pyramide.



Lösung: I. Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 72°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



In einer regelmäßigen Fünfeckpyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Fünfeckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 36°$	$r = \frac{h_a}{\cos 36°}$	$h_a = r \cdot \cos 36°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 36°}$

Grundfläche	$G=\frac{5}{2}ah_a$	$h_a=\frac{2G}{5a}$	$a=\frac{2G}{5h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2=h^2+h_a^2$	$h^2=h_s^2-h_a^2$	$h_a^2=h_s^2-h^2$
Seitenkante	$s^2=h_s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2=s^2-h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2=h^2+r^2$	$h^2=s^2-r^2$	$r^2=s^2-h^2$
Mantelfläche	$M=\frac{5}{2}ah_s$	$h_s=\frac{2M}{5a}$	$a=\frac{2M}{5h_s}$
Oberfläche	$O=G+M$	$G=O-M$	$M=O-G$
Volumen	$V=\frac{1}{3}G\cdot h$	$G=\frac{3V}{h}$	$h=\frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha=\frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha=\frac{a}{2s}$	$\tan\alpha=\frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta=\frac{h}{h_s}$	$\cos\beta=\frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta=\frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma=\frac{h}{s}$	$\cos\gamma=\frac{r}{s}$	$\tan\gamma=\frac{h}{r}$

II. Aus Oberflächeninhalt O = 435,9 cm^2 und Mantelflächeninhalt M = 263,8 cm^2 folgt für den Flächeninhalt der <u>Grundfläche</u> G wegen O = G + M ⇔ G = O – M:
G = 435,9 – 263,8 = 172,1 cm^2.

III. Der Flächeninhalt der Grundfläche wird verwendet zur Bestimmung der <u>Grundkante</u> a. Es ist mit $h_a=\frac{a}{2\cdot\tan 36°}$ als Höhe in einem Grundflächendreieck und der Grundfläche $G=\frac{5}{2}ah_a$:

$$G=\frac{5}{2}a\cdot\frac{a}{2\cdot\tan 36°}=\frac{5a^2}{4\cdot\tan 36°}\Rightarrow 4G\cdot\tan 36°=5a^2\Rightarrow\frac{4}{5}G\cdot\tan 36°=a^2\Rightarrow$$

$$a=\sqrt{\frac{4}{5}G\cdot\tan 36°}=\sqrt{\frac{4}{5}\cdot 172{,}1\cdot\tan 36°}=\sqrt{100{,}03}$$ = 10,0 cm.

IV. Aus dem Mantelflächeninhalt M = 263,8 cm^2 und der Grundkante a = 10 cm ergibt sich die <u>Seitenhöhe</u> h_s der Pyramide:

$$M=\frac{5}{2}ah_s\Rightarrow h_s=\frac{2M}{5a}=\frac{2\cdot 263{,}8}{5\cdot 10}$$ = 10,56 cm.

V. Mit dem Satz des Pythagoras $h_s^2=h^2+h_a^2$ im Höhendreieck der Pyramide errechnet sich mit der Seitenhöhe h_s = 10,56 cm und der Höhe $h_a=\frac{a}{2\cdot\tan 36°}=\frac{10}{2\cdot\tan 36°}$ = 6,88 cm in einem Grundflächendreieck die <u>Höhe</u> h:

$$h^2=h_s^2-h_a^2\Rightarrow h^2=10{,}56^2-6{,}88^2=64{,}18\Rightarrow h=\sqrt{64{,}18}$$ = 8,0 cm.

VI. Das gesuchte <u>Pyramidenvolumen</u> beträgt mit Grundflächeninhalt G = 172,1 cm^2 und Höhe h = 8,0 cm:

$$V=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 172{,}1\cdot 8$$ = 458,9 cm^3.