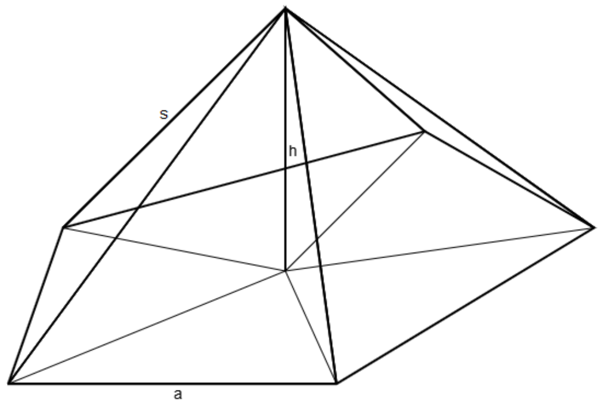
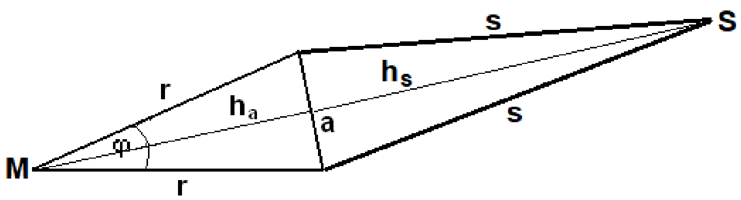
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Fünfeckpyramide

Aufgabe: Berechne für eine regelmäßige Fünfeckpyramide mit Höhe h = 8,0 cm und Seitenkante s = 11,7 cm Volumen und Oberflächeninhalt.



Lösung: I. Eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 72°, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



Grundfläche(ndreieck) Mantelfläche(ndreieck)

In einer regelmäßigen Fünfeckpyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Fünfeckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2} = 36°$	$r = \frac{h_a}{\cos 36°}$	$h_a = r \cdot \cos 36°$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36°}$	$h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan 36°}$
Grundfläche	$G = \frac{5}{2} a h_a$	$h_a = \frac{2G}{5a}$	$a = \frac{2G}{5h_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + h_a^2$	$h^2 = h_s^2 - h_a^2$	$h_a^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$

Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + r^2$	$h^2 = s^2 - r^2$	$r^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = \frac{5}{2} a h_s$	$h_s = \frac{2M}{5a}$	$a = \frac{2M}{5h_s}$
Oberfläche	$O = G + M$	$G = O - M$	$M = O - G$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta = \frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{r}{s}$	$\tan\gamma = \frac{h}{r}$

II. Der Satz des Pythagoras $s^2 = h^2 + r^2$ führt auf die Berechnung des <u>Fünfeckradius</u> r bei Pyramidenhöhe h = 8,0 cm und Seitenkante s = 11,7 cm:

$s^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = s^2 - h^2 = 11{,}7^2 - 8^2 = 72{,}89 \Rightarrow r = \sqrt{72{,}89}$ = 8,54 cm.

III. Das gleichschenklige Grundflächendreieck mit Radius r = 8,54 cm und Winkel φ = 72° wird durch die Dreieckhöhe h_a in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt. Mit dem halben Winkel φ/2 = 36° und dem Radius r lassen sich <u>Grundkante</u> a und <u>Dreieckhöhe</u> h_a berechnen:

$\sin(\frac{\varphi}{2}) = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \sin 36° = \frac{\frac{a}{2}}{8{,}54} \Rightarrow \frac{a}{2} = 8{,}54 \cdot \sin 36°$ = 5,0 cm => a = 10,0 cm

$\cos(\frac{\varphi}{2}) = \frac{h_a}{r} \Rightarrow \cos 36° = \frac{h_a}{8{,}54} \Rightarrow h_a = 8{,}54 \cdot \cos 36°$ = 6,91 cm.

IV. Mit dem Satz des Pythagoras $h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ im Oberflächendreieck der Pyramide errechnet sich bei Seitenkante s = 11,7 cm und halber Grundkante a/2 = 5,0 cm die <u>Seitenhöhe</u> h_s:

$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 11{,}7^2 - 5^2 = 111{,}89 \Rightarrow h_s = \sqrt{111{,}89}$ = 10,58 cm.

V. Als <u>Grundflächeninhalt</u> G der Pyramide ergibt sich:

$G = \frac{5}{2} a h_a = \frac{5}{2} \cdot 10 \cdot 6{,}91$ = 172,75 cm^2,

als <u>Mantelflächeninhalt</u> M:

$M = \frac{5}{2} a h_s = \frac{5}{2} \cdot 10 \cdot 10{,}58$ = 264,5 cm^2,

so dass für den <u>Oberflächeninhalt</u> O gilt:

$O = G + M$ = 172,75 + 264,5 = 437,25 ≈ 437,3 cm^2.

VI. Das gesuchte <u>Pyramidenvolumen</u> beträgt mit Grundflächeninhalt G = 172,75 cm^2 und Höhe h = 8,0 cm:

$V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \cdot 172{,}5 \cdot 8$ = 460,0 cm^3.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2270