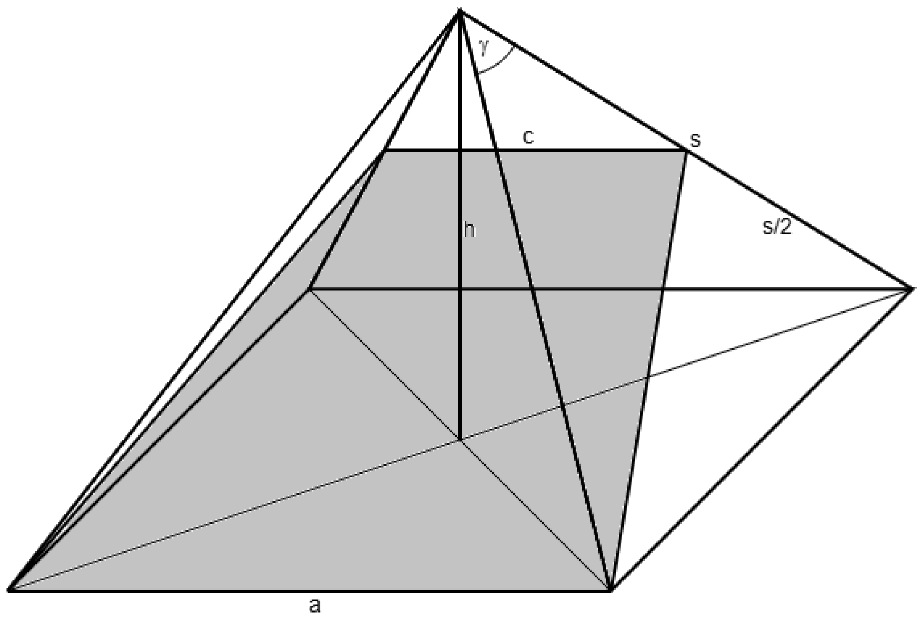
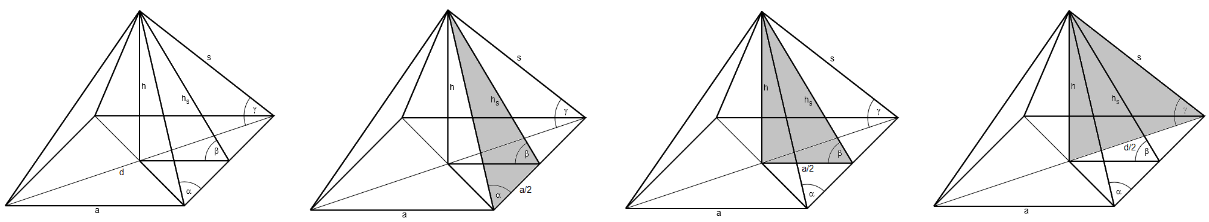
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Das Trapez innerhalb einer quadratischen Pyramide besitzt den Flächeninhalt 96 cm^2, die Trapezhöhe zwischen den parallelen Trapezseiten a und c beträgt 6,4 cm, die Trapezseite c halbiert die Seitenkante s der Pyramide. Zusätzlich ist der Winkel γ = 60° an der Pyramidenspitze zwischen den Seitenkanten der Pyramide gegeben. Berechne das Volumen der quadratischen Pyramide.



Lösung: I. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

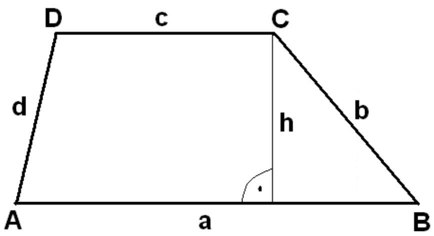
In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

II. Ein Trapez ist ein Viereck ABCD mit den Seiten a, b, c, d, davon zwei parallelen Seiten a und c sowie mit Höhe h.



Der Flächeninhalt eines Trapezes errechnet sich als: A = $\frac{a+c}{2} \cdot h_{Tr}$.

III. Im gleichschenkligen Oberflächendreieck der Pyramide aus den Seitenkanten s und der Grundkante a halbiert nach Voraussetzung die Trapezseite c die Seitenkante s. Nach dem 2. Strahlensatz muss daher c = a/2 gelten, die Trapezseite c ist halb so lang wie die Trapezseite und Grundkante a.

IV. Wir werten das Trapez innerhalb der quadratischen Pyramide aus und haben mit c = a/2, der Trapezhöhe h_{Tr} = 6,4 cm und dem Trapezflächeninhalt A = 96 cm^2:

A = $\frac{a+c}{2} \cdot h_{Tr}$ => 96 = $\frac{a+\frac{a}{2}}{2} \cdot 6{,}4$ => 15 = $\frac{3a}{4}$ => 60 = 3a => a = 20 cm.

Die Trapezseite und Pyramidengrundkante ist damit a = 20 cm lang.

V. Im Oberflächendreieck der Pyramide aus den Seitenkanten s und der Grundkante a liegt auch an der Pyramidenspitze der Winkel γ = 60°. Aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks folgt wegen des Winkels γ = 60° dessen Gleichseitigkeit, so dass s = a = 20 cm gilt. Die Seitenhöhe h_s der Pyramide ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, also:

$h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{20}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ = 17,32 cm.

VI. Im Paralleldreieck der quadratischen Pyramide gilt der Satz des Pythagoras: $h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so dass die Pyramidenhöhe h bestimmt werden kann:

$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 17{,}32^2 - 10^2 = 200 \Rightarrow h = \sqrt{200}$ = 14,14 cm.

VII. Das Volumen der quadratischen Pyramide bestimmt sich schließlich als:

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot 20^2 \cdot 14{,}14$ = 1885,33 ≈ 1885,3 cm^3.

Damit ist der Rauminhalt der Pyramide errechnet.

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2302