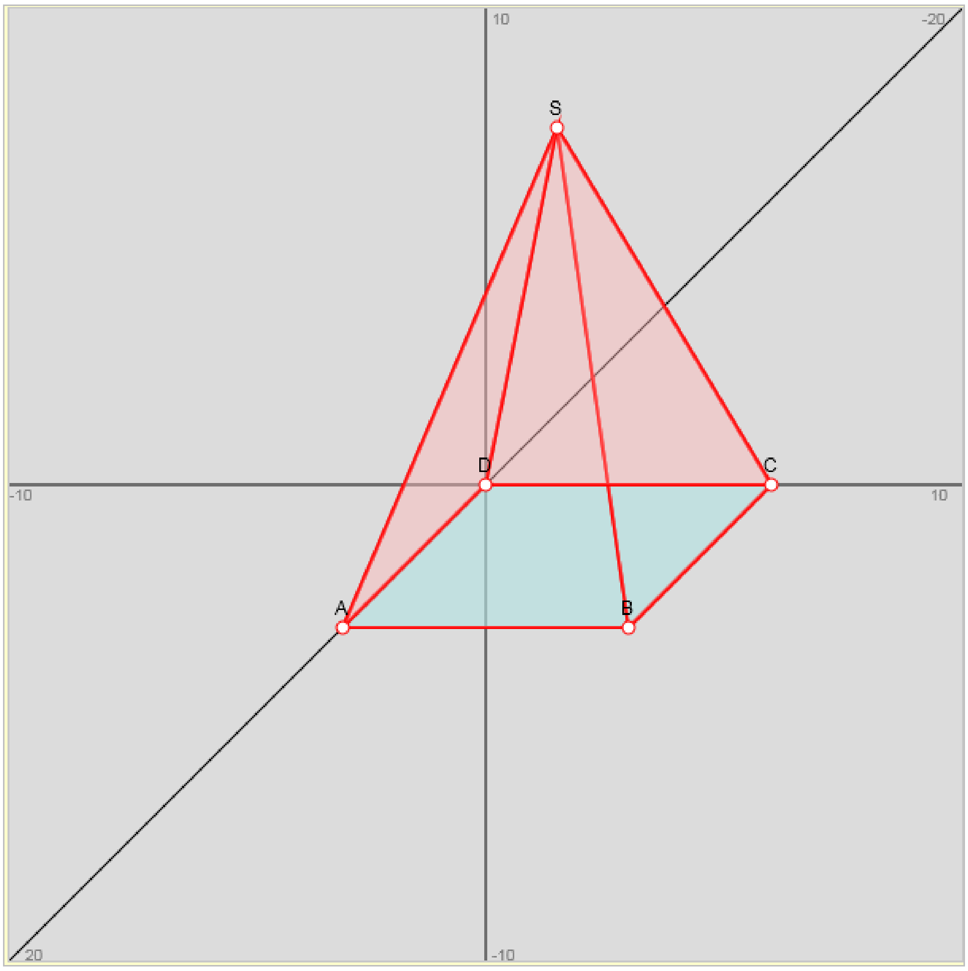
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Eine Pyramide, deren quadratische Grundfläche ABCD auf der x_1-x_2-Grundebene liegt und deren Ecke D der Ursprung des Koordinatensystems ist, hat eine Grundkantenlänge von 6 LE und eine Höhe von 9 LE. Die Pyramidenspitze befindet sich über der Mitte der Grundfläche.



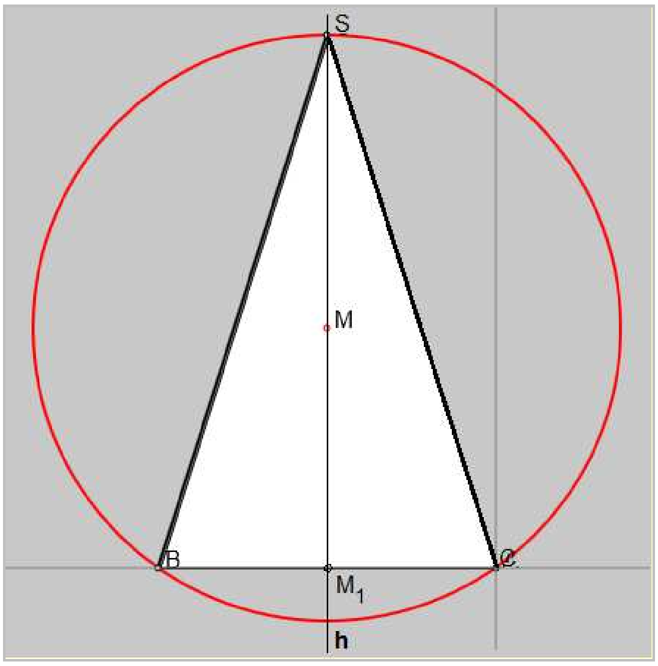
a) Wie lauten die Koordinaten der Punkte A, B, C, D und S? Zeichne die Pyramide in ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem ein.
b) Durch den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks BCS verläuft eine Gerade g, die senkrecht auf dem Dreieck steht. In welchem Punkt P verlässt die Gerade die Pyramide wieder?
c) Bestimme die Oberfläche und das Volumen der Pyramide.
d) Welchen Winkel α schließt eine Seitenkante, welchen Winkel β eine Seitenhöhe mit der Grundfläche ein? Wie groß ist Winkel γ zwischen zwei Mantelflächen?

Lösung: a) Die Pyramidenecken lauten: A(6|0|0), B(6|6|0), C(0|6|0), D(0|0|0), S(3|3|9).

b) Der Umkreismittelpunkt im gleichschenkligen Dreieck BCS liegt auf der Mittelsenkrechten zwischen B und C durch S. Mit der Mitte M_1 zwischen B und C als $M_1(3|6|0)$ ergibt sich die Hilfsgerade

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OM_1} + t\,\overrightarrow{M_1S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit dem laufenden Punkt M(3|6-3t|9t).



Punkt M muss als Umkreismittelpunkt denselben Abstand zu B, C und S, d.h: zu B und S haben; es gilt also:

$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{SM}\right|$ (Differenzvektoren)

$\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -3t \\ 9t \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3-3t \\ 9t-9 \end{pmatrix}\right|$ (Beträge)

$\sqrt{3^2 + (3t)^2 + (9t)^2} = \sqrt{0^2 + (3-3t)^2 + (9t-9)^2}$ (Quadrieren)

$3^2 + (3t)^2 + (9t)^2 = 0^2 + (3-3t)^2 + (9t-9)^2$ (binomische Formeln)

$9 + 9t^2 + 81t^2 = 9 - 18t + 9t^2 + 81t^2 - 162t + 81$ (Zusammenfassen)

$90t^2 + 9 = 90t^2 - 180t + 90$ | $-90t^2$

$9 = -180t + 90$ | –90

$-81 = -180t$ | :(-180)

$t = \frac{9}{20} = 0{,}45$

Der Umkreismittelpunkt lautet damit:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}45 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}65 \\ 4{,}05 \end{pmatrix},$$

also: M(3|4,65|4,05). Die zum Dreieck BCS senkrechte Gerade durch den Punkt M ermittelt sich mit dem Kreuzprodukt als Normalenvektor der Ebene durch die Punkte B, C und S:

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ -> } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Richtungsvektor und dem Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ als Stützvektor zu:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t\,\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}65 \\ 4{,}05 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schnittpunkt der Gerade g mit der Pyramidenoberfläche liegt dann auf der Mantelfläche ADS gegenüber von BCS. Wir bestimmen die Ebene E durch die Punkte A, D und S, die im Übrigen durch den Ursprung verläuft, mit dem Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{DA} \times \vec{DS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -54 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ -> } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und dem Punkt D(0|0|0) als Stützvektor in der Koordinatengleichung:

$$E: -3x_2 + x_3 = 0.$$

Der Schnittpunkt von Gerade g mit der Ebene E ergibt sich durch Einsetzen der Komponenten $x_1=3$, $x_2=4,65+3t$, $x_3=4,05+t$ in die Ebenengleichung:

$-3(4,65+3t) + (4,05+t) = 0$
$-13,95 - 9t + 4,05 + t = 0$
$-9,9 - 8t = 0 \qquad | +9,9$
$-8t = 9,9 \qquad | :(-8)$
$t = -1,2375$

Der Schnittpunkt P ergibt sich damit mit:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,65 \\ 4,05 \end{pmatrix} - 1,2375 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,9375 \\ 2,8125 \end{pmatrix}$$

als P(3|0,9375|2,8125). P liegt im Dreieck ADS.

c) Grundfläche und Mantelflächen der Pyramide lassen sich als Quadrat bzw. Dreiecke mit Hilfe des Kreuzproduktes von Quadrat bzw. Dreieck aufspannenden Vektoren bestimmen. Das Volumen lässt sich aus dem Spatprodukt der Vektoren $\vec{DA}$, $\vec{DC}$ und $\vec{DS}$ errechnen:

(http:\\www.michael-buhlmann.de\Mathematik\math_vektor56a.htm:)

Punkt: $A(a_1 \vert a_2 \vert a_3)$	A(6	0	0)	☑ (eingegeben)
Punkt: $B(b_1 \vert b_2 \vert b_3)$	B(6	6	0)	☑ (eingegeben)
Punkt: $C(c_1 \vert c_2 \vert c_3)$	C(0	6	0)	☑ (eingegeben)
Punkt: $D(d_1 \vert d_2 \vert d_3)$	D(0	0	0)	☐ (eingegeben)
Punkt: $S(s_1 \vert s_2 \vert s_3)$	S(3	3	9)	
Grundfläche/ABCD: G =	36			
	G = |AB-> x AD->|/2			
Höhe/Pyramide: h =	9			
	h = d(S,G)			
Volumen/Pyramide: V =	108			
	V = G*h/3 = |(AB-> x AD->) * AS->|/3			
Oberfläche/ΔABS: O_1 =	28.46			
	O_1 = |AB-> x AS->|/2			
Oberfläche/ΔBCS: O_2 =	28.46			
	O_2 = |BC-> x BS->|/2			
Oberfläche/ΔCDS: O_3 =	28.46			
	O_3 = |CD-> x CS->|/2			
Oberfläche/ΔDAS: O_4 =	28.46			
	O_4 = |DA-> x DS->|/2			
Oberfläche/Pyramide: O =	149.842			
	O = G + O_1 + O_2 + O_3 + O_4			

Doch greifen hier bei der Berechnung von Oberfläche und Volumen auch einfache geometrische Überlegungen.

d) Der Winkel α zwischen Seitenkante und Grundfläche errechnet sich als:

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{DS}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{DS}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{9}{\sqrt{99}}$$ -> α = 64,76°.

Für den Winkel β gilt entsprechend:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{M_1S}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{M_1S}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-3\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\-3\\9\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{9}{\sqrt{90}}$$ -> β = 71,57°.

Bzgl. des Winkels γ zwischen zwei Mantelflächen bestimmen wir den Winkel zwischen den Ebenen durch B, C und S und D, C und S mit den Normalenvektoren

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\54\\18\end{pmatrix}$$ -> $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DS} = -\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}54\\0\\-18\end{pmatrix}$$ -> $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

und mit dem Hilfswinkel γ*:

$$\cos\gamma^* = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{10}$$ -> γ* = 84,26°

und wegen den von den Pyramidenflächen nach außen zeigenden Normalenvektoren als:

γ = 180° – γ* = 180° – 84,26° = 95,74°.

Der Winkel zwischen den Mantelflächen der Pyramide ist also ein stumpfer Winkel.

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 126