Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Parallelogrammpyramide

Aufgabe: a) Zeige, dass das Viereck ABCD mit den Ecken A(1|-4|-8), B(5|-1|-7), C(9|16|-8) und D(5|13|-9) auf einer Ebene liegt. Um welche besondere Art von Viereck handelt es sich?

b) Durch den Schnittpunkt der Vierecksdiagonalen verläuft die Höhe einer Pyramide, deren Grundfläche das Viereck ABCD ist. Die Pyramidenspitze S liegt dabei in der x_2-x_3-Ebene des Koordinatensystems. Bestimme die Koordinaten der Pyramidenspitze sowie das Volumen der Pyramide.

c) Berechne die Oberfläche der Pyramide. Wie groß sind die Winkel zwischen Grundfläche und Mantelflächen, wie groß die zwischen zwei Mantelflächen?

1. Lösung: a) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, da entweder

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix} = \vec{DC}$$

oder:

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \vec{BC}$$

gilt. Wegen der Parallelogrammeigenschaft des Vierecks liegen alle Eckpunkte A, B, C, D in einer Ebene.

b) I. Der Schnittpunkt der Vierecksdiagonalen ist beim Parallelogramm ABCD die Mitte M zwischen A und C oder B und D. Wir rechnen:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix},$$

so dass der Parallelogrammmittelpunkt M(5|6|-8) heißt.

II. Im Mittelpunkt M beginnt die Pyramidenhöhe, die auf der x_2-x_3-Ebene des Koordinatensystems in der Pyramidenspitze S endet. Als Höhe steht die (Lot-) Gerade g durch die Punkte M und S senkrecht auf dem Parallelogramm ABCD. Die Gerade hat somit als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene durch die Punkte A, B, C, D. Wir bilden daher das Kreuzprodukt:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix},$$

so dass nach Reduzierung der Kreuzproduktkomponenten (Teilen durch 4) sich als Richtungsvektor:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix},$$

ergibt. Die die Pyramidenhöhe darstellende Geradengleichung lautet somit wegen des Ortsvektors $\vec{OM}$ als Stützvektor:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

III. Die Lotgerade g trifft die x_2-x_3-Ebene im Spurpunkt als <u>Pyramidenspitze</u> S. Wir setzen daher die x_1-Koordinate der Geraden gleich 0 (Koordinatengleichung der x_2-x_3-Ebene: E: $x_1 = 0$) und erhalten:

$x_1 = 0 \Leftrightarrow 5 - 5t = 0 \Leftrightarrow 5 = 5t \Leftrightarrow t = 1$

und weiter:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit der gesuchten Pyramidenspitze S(0|8|6).

IV. Das <u>Volumen</u> V der Parallelogrammpyramide mit Grundfläche ABCD und Spitze S errechnet sich gemäß der Formel:

V = Gh/3

mit G als Grundfläche des Parallelogramms und h als Pyramidenhöhe. Die Pyramidenhöhe ist der Abstand von Parallelogrammmittelpunkt M zu Pyramidenspitze S wegen der Orthogonalität von Vektor $\vec{MS}$ zur Ebene, auf der die Grundfläche ABCD liegt. Es ist:

$$\vec{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

und damit die Pyramidenhöhe als Länge des Vektors $\vec{MS}$:

h = $\left|\vec{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 14^2} = \sqrt{25 + 4 + 196} = \sqrt{225} = 15$ LE.

Die Grundfläche des Parallelogramms ABCD ist der Betrag des Kreuzproduktvektors:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix},$$

also:

G = $\left|\vec{AB} \times \vec{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-20)^2 + 8^2 + 56^2} = \sqrt{400 + 64 + 3136} = \sqrt{3600} = 60$ FE.

Das Pyramidenvolumen V errechnet sich zu:

V = 60·15/3 = 300 VE.

c) I. Die <u>Oberfläche</u> der Parallelogrammpyramide ABCDS besteht aus der Grundfläche und der Mantelfläche, also: O = G + M, die Mantelfläche aus den vier Mantelflächendreiecken, von denen auf Grund des Parallelogramms als Grundfläche jeweils zwei gegenüberliegende gleich sind. Der Flächeninhalt des Mantelflächendreiecks ABS ist der halbe Betrag des Kreuzproduktvektors:

$$\vec{AB}\times\vec{AS} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\12\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix},$$

also:

M_1 =

$$\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30^2+(-57)^2+51^2} = \frac{1}{2}\sqrt{900+3249+2601} = \frac{1}{2}\sqrt{6750} = 7{,}5\sqrt{30} \text{ FE.}$$

Entsprechendes gilt für das zweite Mantelflächendreieck BCS:

$$\vec{BC}\times\vec{BS} = \begin{pmatrix}4\\17\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\9\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}$$

und damit:

M_2 =

$$\frac{1}{2}\left|\vec{BC}\times\vec{BS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{230^2+(-47)^2+121^2} = \frac{1}{2}\sqrt{52900+2209+14641} = \frac{1}{2}\sqrt{69750} = 7{,}5\sqrt{310} \text{ FE.}$$

Die Mantelfläche M der Pyramide berechnet sich als:

M = $2\cdot M_1 + 2\cdot M_2 = 15\sqrt{30}+15\sqrt{310} = 15(\sqrt{30}+\sqrt{310})$ FE,

die Oberfläche wegen G = 60 FE als:

O = G + M = $60+15(\sqrt{30}+\sqrt{310})$ FE.

II. Die Berechnung der Winkel innerhalb der Parallelogrammpyramide erfolgt über die Normalenvektoren der Ebenen, in denen die Pyramidenflächen liegen. Es sind folgende Winkel zu ermitteln: Winkel α zwischen Mantelfläche ABS und Grundfläche ABCD, Winkel β zwischen Mantelfläche BCS und Grundfläche ABCD, Winkel γ zwischen Mantelfläche ABS und Mantelfläche BCS, Winkel δ zwischen Mantelfläche ABS und Mantelfläche ADS. Damit gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AD}\right)\cdot\left(\vec{AB}\times\vec{AS}\right)\right|}{\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right|\cdot\left|\vec{AB}\times\vec{AS}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-20\\8\\56\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-20\\8\\56\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-600-456+2856|}{60\cdot 15\sqrt{30}} = \frac{1800}{900\sqrt{30}} = 0{,}3651$$

=> α = 68,58°

$$\cos\beta = \frac{\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AD}\right)\cdot\left(\vec{BC}\times\vec{BS}\right)\right|}{\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right|\cdot\left|\vec{BC}\times\vec{BS}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-20\\8\\56\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-20\\8\\56\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4600-376+6776|}{60\cdot 15\sqrt{310}} = \frac{1800}{900\sqrt{310}} = 0{,}1136$$

=> β = 83,48°

$$\cos\gamma = \frac{\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AS}\right)\cdot\left(\vec{BC}\times\vec{BS}\right)\right|}{\left|\vec{AB}\times\vec{AS}\right|\cdot\left|\vec{BC}\times\vec{BS}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}230\\-47\\121\end{pmatrix}\right|} = \frac{|6900+2679+6171|}{15\sqrt{30}\cdot 15\sqrt{310}} = \frac{15750}{2250\sqrt{93}} = 0{,}7259$$

=> γ = 43,46°

$$\cos\delta = \frac{\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AS}\right)\cdot\left(\vec{AD}\times\vec{AS}\right)\right|}{\left|\vec{AB}\times\vec{AS}\right|\cdot\left|\vec{AD}\times\vec{AS}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}250\\-55\\65\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}30\\-57\\51\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}250\\-55\\65\end{pmatrix}\right|} = \frac{|7500+3135+3315|}{15\sqrt{30}\cdot 15\sqrt{310}} = \frac{13950}{2250\sqrt{93}} = 0{,}6429$$

=> δ = 180° – 49,99° = 130,01°

(auf Grund des Kreuzprodukts $\vec{AD}\times\vec{AS} = \begin{pmatrix}4\\17\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\12\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\\-55\\65\end{pmatrix}$ mit: $\left|\vec{AD}\times\vec{AS}\right| = \left|\begin{pmatrix}250\\-55\\65\end{pmatrix}\right| =$ $\sqrt{250^2+(-55)^2+65^2} = \sqrt{69750} = 15\sqrt{310}$ und der Tatsache, dass der Winkel γ ein stumpfer Winkel im Pyramideninneren ist und die Normalenvektoren von den Pyramidenflächen weg nach außen zeigen; zum Vergleich: die Winkel im Parallelogramm betragen an den Ecken A und C 42,27°, an den Ecken B und D 180°–42,27° = 137,73°).

2. Lösung: a) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, da z.B.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\16\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\13\\-9\end{pmatrix} = \vec{DC}$$

gilt. Wegen der Parallelogrammeigenschaft des Vierecks liegen alle Eckpunkte A, B, C, D in einer Ebene.

b) I. Der Schnittpunkt der Viereckdiagonalen ist beim Parallelogramm ABCD die Mitte M zwischen A und C oder B und D. Wir rechnen:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\16\\-8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\12\\-16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\-8\end{pmatrix},$$

so dass der Parallelogrammmittelpunkt M(5|6|-8) heißt.

II. Im Mittelpunkt M beginnt die Pyramidenhöhe, die auf der x_2-x_3-Ebene des Koordinatensystems in der Pyramidenspitze S endet. Als Höhe steht die (Lot-) Gerade g durch die Punkte M und S senkrecht auf dem Parallelogramm ABCD. Die Gerade hat somit als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene durch die Punkte A, B, C, D. Wir bilden daher das Kreuzprodukt:

$$\vec{AB}\times\vec{AD} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\17\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\8\\56\end{pmatrix},$$

so dass nach Reduzierung der Kreuzproduktkomponenten (Teilen durch 4) sich als Richtungsvektor:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix},$$

ergibt. Die die Pyramidenhöhe darstellende Geradengleichung lautet somit wegen des Ortsvektors $\vec{OM}$ als Stützvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

III. Die Lotgerade g trifft die x_2-x_3-Ebene im Spurpunkt als Pyramidenspitze S. Wir setzen daher die x_1-Koordinate der Geraden gleich 0 (Koordinatengleichung der x_2-x_3-Ebene: E: $x_1 = 0$) und erhalten:

$x_1 = 0 \Leftrightarrow 5 - 5t = 0 \Leftrightarrow 5 = 5t \Leftrightarrow t = 1$

und weiter:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

mit der gesuchten Pyramidenspitze S(0|8|6).

(http:\\www.michael-buhlmann.de\Mathematik\math_vektor56b.htm:)

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(1	-4	-8)	☑	(eingegeben)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(5	-1	-7)	☑	(eingegeben)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(9	16	-8)	☑	(eingegeben)
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(5	13	-9)	☐	(eingegeben)
Punkt: $S(s_1\|s_2\|s_3)$	S(0	8	6)		
Zeichenbereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 15 (-> x_1-Wert)				
Ortsvektoren/ABCDS:	☑ (ja)				
Grundfläche/ABCD: G =	60				
	G = |AB-> x AD->|/2				
Höhe/Pyramide: h =	15				
	h = d(S,G)				
Volumen/Pyramide: V =	300				
	V = G*h/3 = |(AB-> x AD->) * AS->|/3				
Oberfläche/ΔABS: O_1 =	41.079				
	O_1 = |AB-> x AS->|/2				
Oberfläche/ΔBCS: O_2 =	132.051				
	O_2 = |BC-> x BS->|/2				
Oberfläche/ΔCDS: O_3 =	41.079				
	O_3 = |CD-> x CS->|/2				
Oberfläche/ΔDAS: O_4 =	132.051				
	O_4 = |DA-> x DS->|/2				
Oberfläche/Pyramide: O =	406.261				
	O = G + O_1 + O_2 + O_3 + O_4				

IV. Das Volumen V der Parallelogrammpyramide mit Grundfläche ABCD und Spitze S errechnet sich gemäß dem Spatprodukt als:

$$V = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AS}\right|}{3} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{|20 + 96 + 784|}{3} = \frac{900}{3} = 300 \text{ VE.}$$

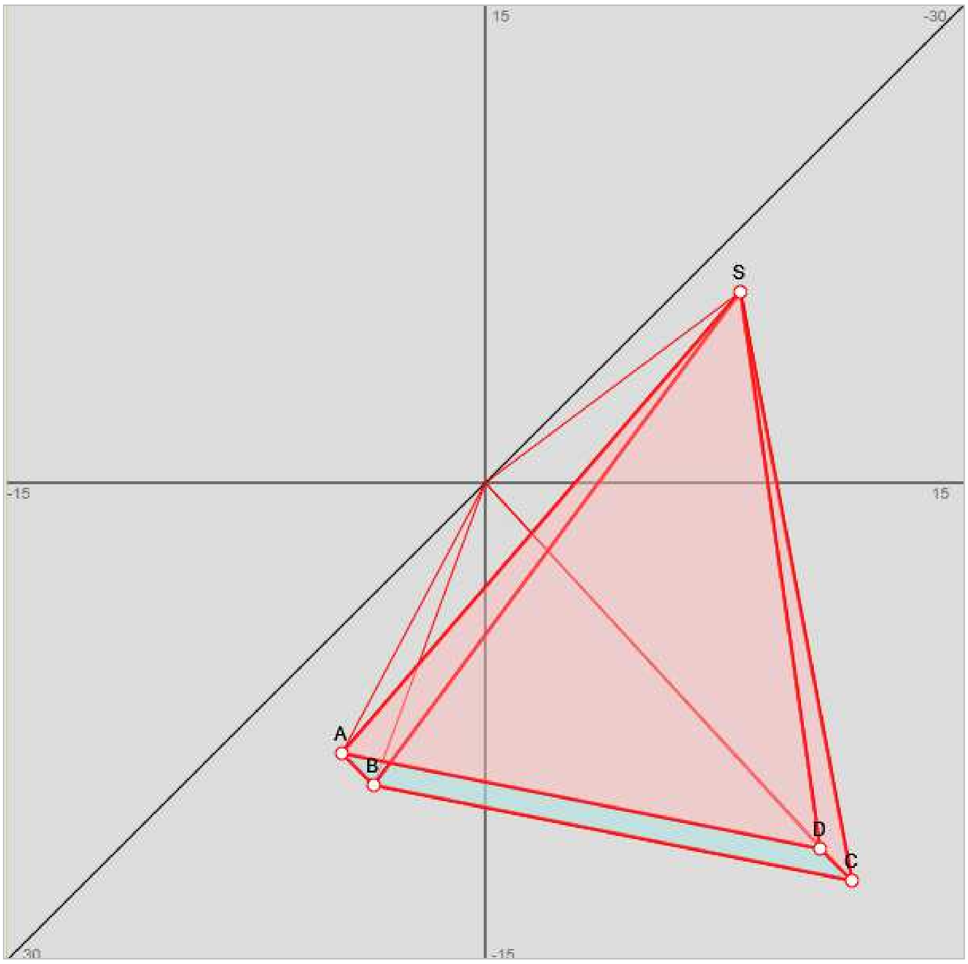
c) I. Die Oberfläche der Parallelogrammpyramide ABCDS besteht aus der Grundfläche und der Mantelfläche, also: O = G + M, die Mantelfläche aus den vier Mantelflächendreiecken, von denen auf Grund des Parallelogramms als Grundfläche jeweils zwei gegenüberliegende gleich sind. Es ergibt sich:

O = G + M = 60 + 2·41,08 + 2·132,05 = 406,26 FE.

II. Die Berechnung der Winkel innerhalb der Parallelogrammpyramide erfolgt über die Normalenvektoren der Ebenen, in denen die Pyramidenflächen liegen. Es sind folgende Winkel zu ermitteln: Winkel α zwischen Mantelfläche ABS und Grundfläche ABCD, Winkel β zwischen Mantelfläche BCS und Grundfläche ABCD, Winkel γ zwischen Mantelfläche ABS und Mantelfläche BCS, Winkel δ zwischen Mantelfläche ABS und Mantelfläche ADS. Damit gilt:

α = 68,58°, β = 83,48°, γ = 43,46°, δ = 180° – 49,99° = 130,01°

auf Grund der Formel für einen (Schnitt-) Winkel zwischen zwei (Normalen-) Vektoren.



(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit, VE = Volumeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 10.2017 / Aufgabe 514