Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Rechteckpyramide

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte A(1|4|-4), B(3|5|0), C(-1|9|1) und D(-3|8|-3) und S(-2|-3|8), die die Ecken einer Viereckpyramide sind.

a) Zeige, dass es sich beim Viereck ABCD um ein Rechteck handelt, und bestimme den Flächeninhalt der Pyramidengrundfläche.

b) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide.

c) Berechne den Rauminhalt der Pyramide.

Lösung: a) Das <u>Viereck</u> ABCD ist ein Parallelogramm, da z.B.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{DC}$$

gilt. Das Parallelogramm ist zudem ein Rechteck wegen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ => } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 + 4 + 4 = 0 \,.$$

Am einfachsten lässt sich der <u>Flächeninhalt</u> der Pyramidengrundfläche ABCD über das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) bestimmen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ => } \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ => G = } \left| \begin{pmatrix} -15 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{15^2 + 18^2 + 12^2}$$

≈ 26,325 FE.

b) Wir berechnen alle für das Nachfolgende notwendigen Differenz- und Kreuzproduktvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BC} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 27 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = -\vec{AB} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{CS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{CD} \times \vec{CS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ 18 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DA} = -\vec{AD} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{DS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{DA} \times \vec{DS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ -45 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Die Oberfläche der Rechteckpyramide ABCDS besteht aus der Grundfläche und der Mantelfläche, die Mantelfläche aus den vier Mantelflächendreiecken M_1, M_2, M_3, M_4. Da Dreiecke als halbe Parallelogramme verstanden werden können, ergibt sich ihr Flächeninhalt als halber Flächeninhalt des zum Dreieck gehörenden Parallelogramms. Es folgt also mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$M_1 = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 40 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix}\right| \approx 27{,}464 \text{ FE}$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\left|\vec{BC} \times \vec{BS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 40 \\ 27 \\ 52 \end{pmatrix}\right| \approx 35{,}472 \text{ FE}$$

$$M_3 = \frac{1}{2}\left|\vec{CD} \times \vec{CS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -55 \\ 18 \\ 23 \end{pmatrix}\right| \approx 31{,}137 \text{ FE}$$

$$M_4 = \frac{1}{2}\left|\vec{DA} \times \vec{DS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -55 \\ -45 \\ -40 \end{pmatrix}\right| \approx 40{,}774 \text{ FE.}$$

Die Pyramidenmantelfläche M und die -oberflache O errechnen sich als:

$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 27{,}464 + 35{,}472 + 31{,}137 + 40{,}774 = 134{,}846$ FE
$O = G + M = 26{,}325 + 134{,}846 = 161{,}171$ FE.

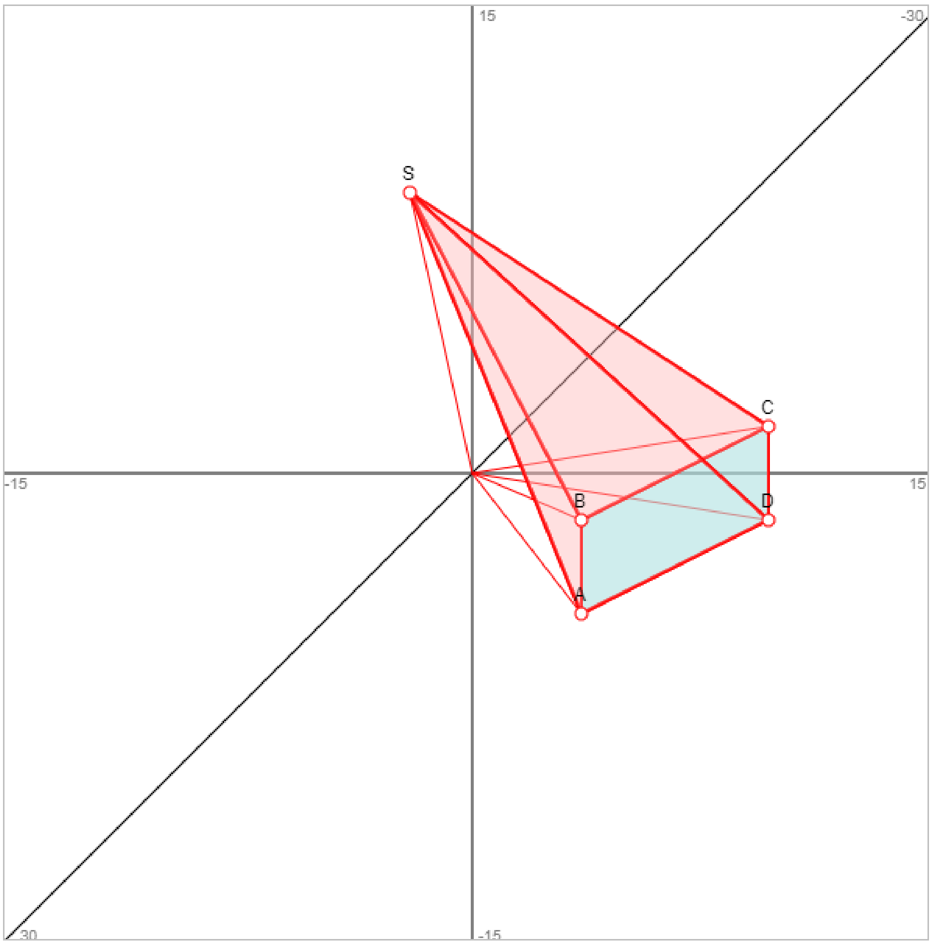
c) Das Volumen V der Rechteck- als Parallelogrammpyramide mit Grundfläche ABCD und Spitze S errechnet sich gemäß dem Spatprodukt als:

$$V = \frac{1}{3}\left|\left(\vec{AB} \times \vec{AD}\right) \cdot \vec{AS}\right| = \frac{1}{3}\left|\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} -15 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|45 + 98 + 144\right| = \frac{315}{3} = 105 \text{ VE.}$$

(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit, VE = Volumeneinheit)

(http:\\www.michael-buhlmann.de\Mathematik\math_vektor56b.htm:)

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(1 | 4 | -4)	☑ (eingegeben)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(3 | 5 | 0)	☑ (eingegeben)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(-1 | 9 | 1)	☑ (eingegeben)
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(-3 | 8 | -3)	☐ (eingegeben)
Punkt: $S(s_1\|s_2\|s_3)$	S(-2 | -3 | 8)	
Zeichenbereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 15 (-> x_1-Wert)	
Ortsvektoren/ABCDS:	☑ (ja)	
Grundfläche/ABCD: G =	26.325	
	$G = \|AB^{->} \times AD^{->}\|$	
Höhe/Pyramide: h =	11.966	
	$h = d(S,G)$	
Volumen/Pyramide: V =	105	
	$V = G*h/3 = \|(AB^{->} \times AD^{->}) * AS^{->}\|/3$	
Mantelfläche/ΔABS: M_1 =	27.464	
	$M_1 = \|AB^{->} \times AS^{->}\|/2$	
Mantelfläche/ΔBCS: M_2 =	35.472	
	$M_2 = \|BC^{->} \times BS^{->}\|/2$	
Mantelfläche/ΔCDS: M_3 =	31.137	
	$M_3 = \|CD^{->} \times CS^{->}\|/2$	
Mantelfläche/ΔDAS: M_4 =	40.774	
	$M_4 = \|DA^{->} \times DS^{->}\|/2$	
Mantelfläche/Pyramide: M =	134.846	
	$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$	
Oberfläche/Pyramide: O =	161.171	
	$O = G + M$	



www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1141