Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieckpyramide

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte A(1|2|-4), B(3|-1|-2), C(-2|-4|1) und S(-1|2|4), die die Ecken einer Dreieckpyramide sind.

a) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide.

b) Berechne den Rauminhalt der Pyramide.

Lösung: a) Wir berechnen alle für das Nachfolgende notwendigen Differenz- und Kreuzprodukt-vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -16 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -20 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{BS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BC} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 18 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Die Oberfläche der Rechteckpyramide ABCDS besteht aus der Dreieckgrundfläche und der Mantelfläche, die Mantelfläche aus den drei Mantelflächendreiecken M_1, M_2, M_3. Da Dreiecke als halbe Parallelogramme verstanden werden können, ergibt sich ihr Flächeninhalt als halber Flächeninhalt des zum Dreieck gehörenden Parallelogramms. Es folgt also mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$G = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -16 \\ -21 \end{pmatrix}\right| \approx 13{,}285 \text{ FE}$$

$$M_1 = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -24 \\ -20 \\ -6 \end{pmatrix}\right| \approx 15{,}906 \text{ FE}$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\left|\vec{AC} \times \vec{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -55 \\ 18 \\ 23 \end{pmatrix}\right| \approx 25{,}71 \text{ FE}$$

$$M_3 = \frac{1}{2}\left|\vec{BC} \times \vec{BS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -27 \\ 18 \\ -27 \end{pmatrix}\right| \approx 21{,}107 \text{ FE.}$$

Die Pyramidenmantelfläche M und die -oberflache O errechnen sich als:

$M = M_1 + M_2 + M_3 = 15{,}906 + 25{,}71 + 21{,}107 = 62{,}723$ FE
$O = G + M = 13{,}285 + 62{,}723 = 76{,}008$ FE.

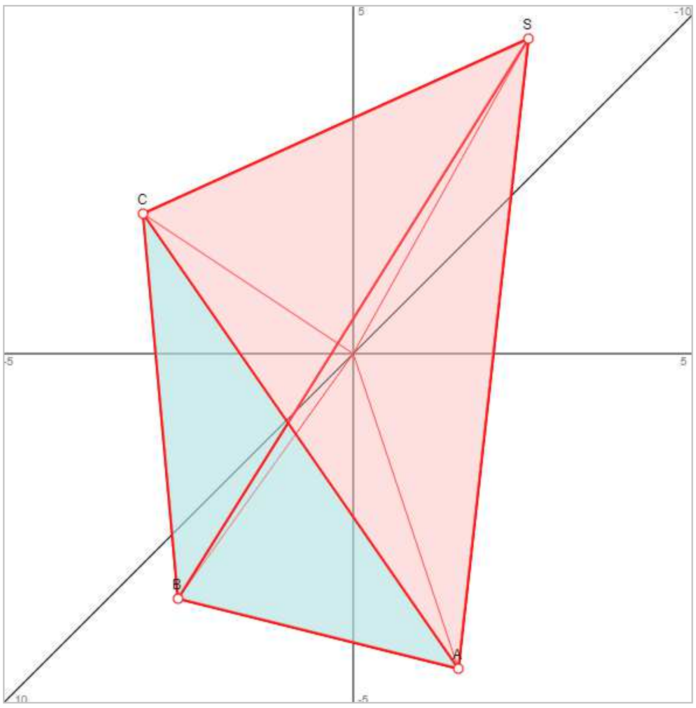
b) Das <u>Volumen</u> V der Dreieckpyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S errechnet sich gemäß dem Spatprodukt als:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-3\\-16\\-21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|6+0-168\right| = \frac{162}{6} = 27 \text{ VE.}$$

(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit, VE = Volumeneinheit)

(http:\\www.michael-buhlmann.de\Mathematik\ math_vektor55b.htm:)

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(1 | 2 | -4)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(3 | -1 | -2)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(-2 | -4 | 1)
Punkt: $S(s_1\|s_2\|s_3)$	S(-1 | 2 | 4)
Bereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 5 (-> x_1-Wert)
Ortsvektoren/ABCS:	☑ (ja)
Grundfläche/ΔABC: G =	13.285
	G = |AB-> x AB->|/2
Höhe/Pyramide: h =	6.097
	h = d(S,G)
Volumen/Pyramide: V =	27
	V = G*h/3 = |(AB-> x AC->) * AS->|/6
Mantelfläche/ΔABS: M_1 =	15.906
	M_1 = |AB-> x AS->|/2
Mantelfläche/ΔACS: M_2 =	25.71
	M_2 = |AC-> x AS->|/2
Mantelfläche/ΔBCS: M_3 =	21.107
	M_3 = |BC-> x BS->|/2
Mantelfläche/Pyramide: M =	62.723
	$M = M_1 + M_2 + M_3$
Oberfläche/Pyramide: O =	76.008
	O = G + M



www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1142