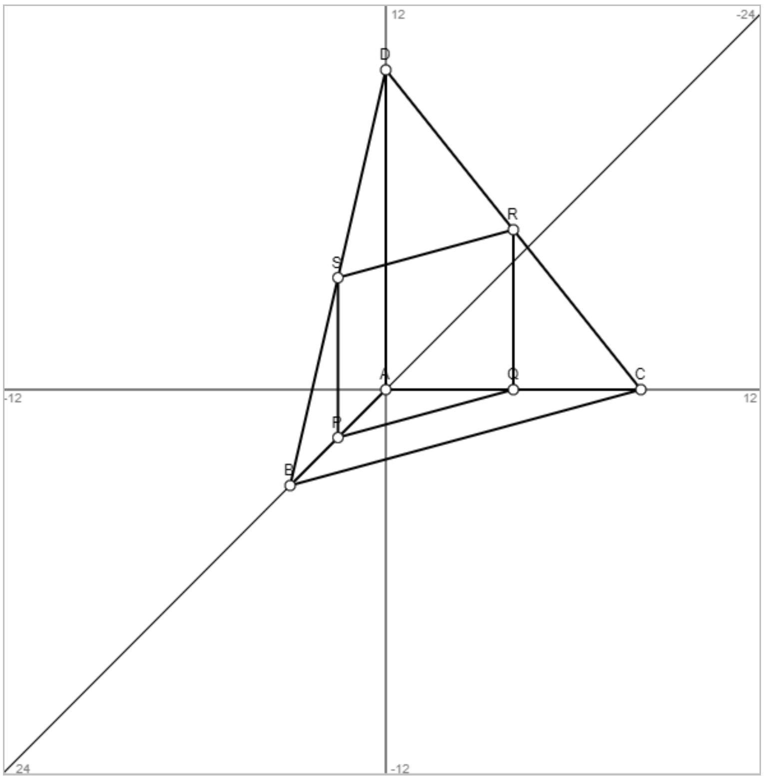
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Dreieckpyramide

Aufgabe: Beweise: In einer Dreieckspyramide ABCD bilden die Mitten P, Q, R, S der Kanten zwischen A und B, A und C, C und D sowie B und D ein Parallelogramm.



1. Lösung: Die (beliebige) Dreieckpyramide ABCD wird aufgespannt von den Vektoren:

$\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$, $\vec{d} = \vec{AD}$.

Die Kantenmitten berechnen sich als:

$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{OQ} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{OR} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$, $\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

Um nachzuweisen, dass das Viereck PQRS ein Parallelogramm ist, muss (z.B.) gelten:

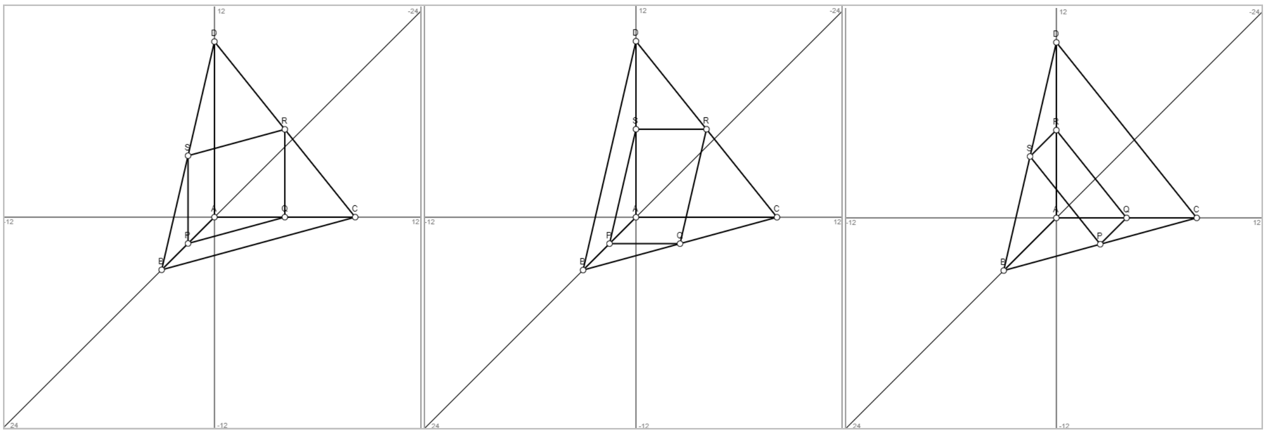
$\vec{PQ} = \vec{SR}$.

Dies gilt in der Tat wegen:

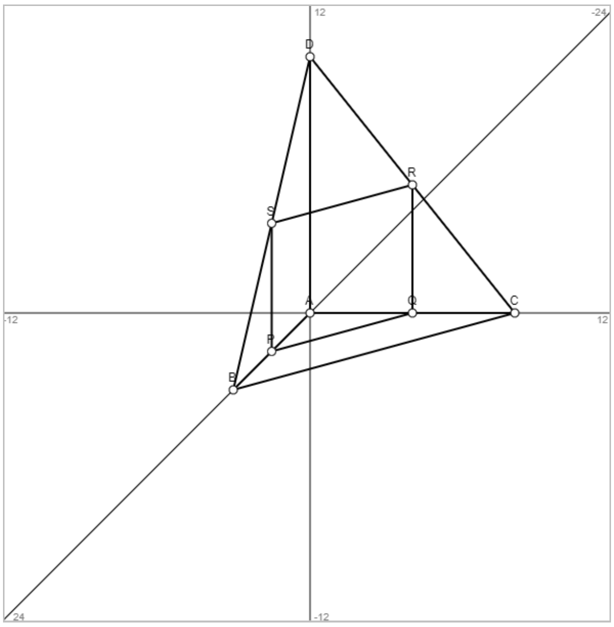
$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \left(\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \left(\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{BC},$$

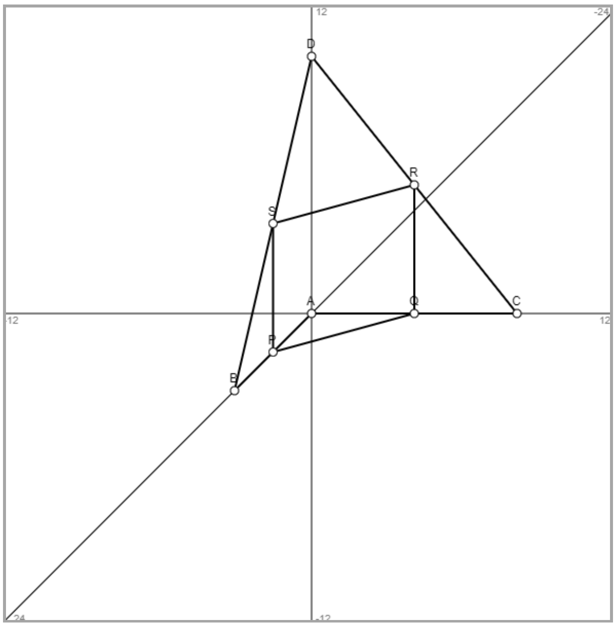
$$\vec{SR} = \vec{OR} - \vec{OS} = \left(\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \left(\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

Allgemein sind die Differenzvektoren von Kantenmitten gleich, wenn die Kantenmitten nicht auf der Pyramidenkante liegen, in der sich die Pyramidenmantelflächen, auf denen die Differenzvektoren liegen, schneiden; dadurch entsteht das Parallelogramm der Kantenmitten. Für Differenzvektoren, die eine Kantenmitte gemeinsam haben oder deren dazugehörige Geraden windschief liegen, gilt die Gleichheit natürlich nicht, ebenso sind diese Vektoren nicht gleich lang. Letztendlich lässt sich der Sachverhalt in der Aufgabenstellung auch schneller und einfacher über die Strahlensätze aus der elementaren Geometrie beweisen.



2. Lösung: Aus der (beliebigen) Dreieckpyramide ABCD entfernen wir die Kanten, auf denen keine der Mitten P, Q, R und S liegen. Wir erhalten das (beliebige) Viereck ABCD:



->


Die Ortsvektoren zu den Ecken des Vierecks ABCD heißen:

$\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $\vec{d} = \vec{OD}$.

Die Ortsvektoren der Mitten der Viereckseiten P, Q, R, S errechnen sich dann als:

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{OR} = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} + \vec{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{OS} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\ .$$

Damit beim Viereck PQRS ein Parallelogramm vorliegt, muss z.B. gelten:

$\vec{PS} = \vec{QR}$.

Nun ist in der Tat:

$$\vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{QR} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \text{ ,}$$

woraus die Parallelogrammeigenschaft des Mittelpunktvierecks PQRS folgt.

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1143