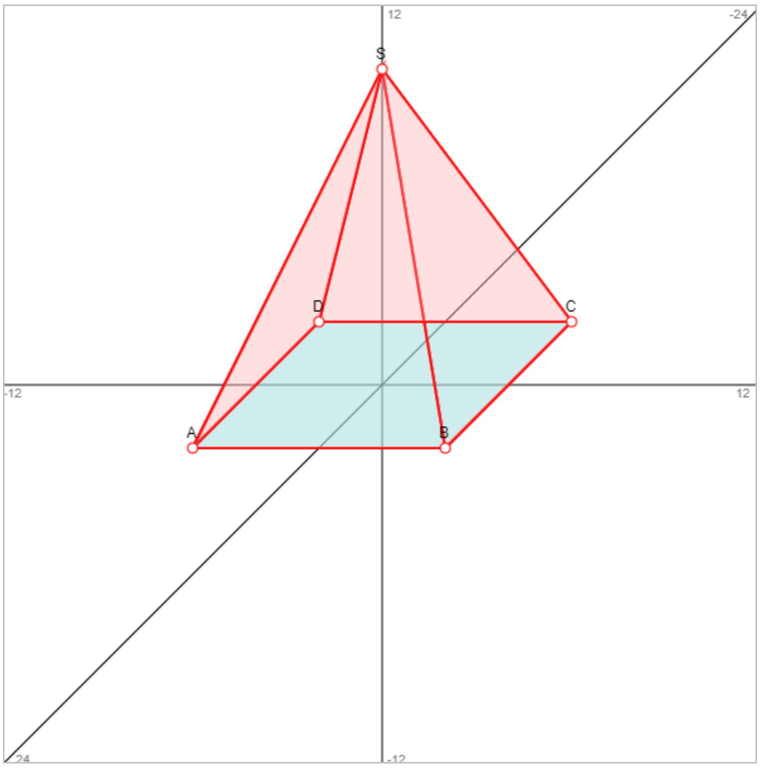
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Eine regelmäßige Pyramide, deren quadratische Grundfläche ABCD auf der x_1-x_2-Grundebene liegt und deren Spitze S auf der x_3-Achse des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems liegt, hat eine Grundkantenlänge von 8 LE und eine Höhe von 10 LE. Wo liegt der Punkt P, der von allen Pyramidenflächen denselben Abstand besitzt?

1. Lösung: I. Die Pyramidenecken lauten: A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), S(0|0|10), so dass sich die folgende Zeichnung der Pyramide im x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ergibt:



II. Die regelmäßige quadratische Pyramide ABCDS besitzt gewisse Symmetrieeigenschaften bzgl. der x_3-Achse des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems, so dass der gesuchte Punkt P mit Abstandsgleichheit zu den Pyramidenflächen ABCD, ABS, BCS, CDS, ADS auf der x_3-Achse liegen muss. Wir haben damit den Ansatz: P(0|0|t) mit zu bestimmenden t>0.

III. Ebenfalls wegen der Symmetrie der Pyramide ist der Abstand des Punktes P zur Grundfläche ABCD und nur zu einem der Manteldreiecke, etwa ABS, zu betrachten. Dazu verwenden wir die x_1-x_2-Grundebene E_1: $x_3 = 0$ und die Ebene E_2 durch die Punkte A, B, S, die sich etwa aus nachstehendem Ansatz, linearem Gleichungssystem und Gauß-Algorithmus ergibt:

Ansatz der Ebenengleichung E_2: $ax_1+bx_2+cx_3 = 1$
Punkte A(4|-4|0), B(4|4|0), S(0|0|10) -> Einsetzen in E_2 ->

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrl} + & 4a & - & 4b & & & = 1 \\ + & 4a & + & 4b & & & = 1 \\ & & & & + & 10c & = 1 \end{array}$$

Anfangstableau:

4	-4	0	|	1
4	4	0	|	1
0	0	10	|	1

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) /

4	-4	0	|	1
0	8	0	|	0
0	0	10	|	1

2. Schritt: (keine Umformung) /

4	-4	0	|	1
0	8	0	|	0
0	0	10	|	1

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrl} +4a & -4b & & = 1 \\ & +8b & & = 0 \\ & & +10c & = 1 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 0.1$
$b = 0$
$a = 0.25$

-> Ebene E_2: $0,25x_1 + 0,1x_3 = 1$ -> E_2: $5x_1 + 2x_3 = 20$.

IV. Nach diesen Voraussetzungen (II., III.) verwenden wir die Hessesche Normalform der Abstände zwischen Punkt P und Ebenen E_1, E_2, um mit der Abstandsgleichheit die Punktkoordinaten (d.h. die Komponente t) zu bestimmen.
Zunächst gilt mit $P(p_1|p_2|p_3)$ und E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ die Hessesche Normalform:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Damit ergeben sich für P(0|0|t), E_1: $x_3 = 0$, E_2: $5x_1 + 2x_3 = 20$ die Abstände:

$$d(P,E_1) = \frac{|0+0+t-0|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = |t|$$

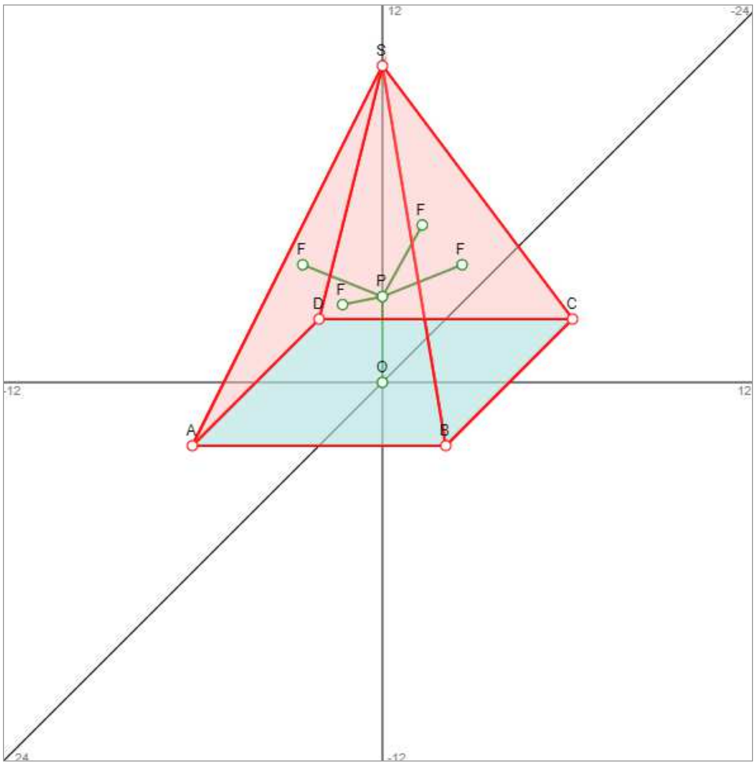
$$d(P,E_2) = \frac{|5\cdot 0 + 0 + 2t - 20|}{\sqrt{5^2+0^2+2^2}} = \frac{|2t-20|}{\sqrt{29}}.$$

Die geforderte Abstandsgleichheit führt auf eine Gleichung, die letztlich nach t aufgelöst werden kann

$d(P,E_1) = d(P,E_2)$	(s.o.)
$\lvert t\rvert = \frac{\lvert 2t-20\rvert}{\sqrt{29}}$	| ·√29
$\lvert t\rvert\sqrt{29} = \lvert 2t-20\rvert$	(Betragsstriche auflösen)
$\pm t\sqrt{29} = 2t - 20$	| +20
$20 \pm t\sqrt{29} = 2t$	| -(±t√29)
$20 = 2t \pm t\sqrt{29}$	(Ausklammern)
$20 = (2 \pm \sqrt{29})t$	| :(2±√29)
$t = \frac{20}{2 \pm \sqrt{29}}.$	

Nur für $t = \frac{20}{2+\sqrt{29}}$ ist t>0, so dass der gesuchte Punkt P sich als:

P(0|0| $\frac{20}{2+\sqrt{29}}$) ≈ P(0|0|2,7081) darstellt.



V. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse zeigt:
(http:\\www.michael-buhlmann.de\Mathematik\math_vektor565c.htm:)

Grundkante: a =	8		
Höhe: h =	10		
Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(4	-4	0)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(4	4	0)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(-4	4	0)
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(-4	-4	0)
Punkt: $S(s_1\|s_2\|s_3)$	S(0	0	10)
Punkt: $P(p_1\|p_2\|p_3)$	P(0	0	2.7081)
Lotfußpunkt Ebene ABS: $F_{ABS}(f_1\|f_2\|f_3)$	F_{ABS}(2.5144	0	3.7139)
Lotfußpunkt Ebene BCS: $F_{BCS}(f_1\|f_2\|f_3)$	F_{BCS}(0	2.5144	3.7139)
Lotfußpunkt Ebene CDS: $F_{CDS}(f_1\|f_2\|f_3)$	F_{CDS}(-2.5144	0	3.7139)
Lotfußpunkt Ebene ADS: $F_{ADS}(f_1\|f_2\|f_3)$	F_{ADS}(0	-2.5144	3.7139)
Abstände Punkt-Flächen: d =	$d(P,E_{ABCD}) = d(P,E_{ABS}) = d(P,E_{BCS}) = d(P,E_{CDS}) = d(P,E_{ADS}) =$ 2.7081		

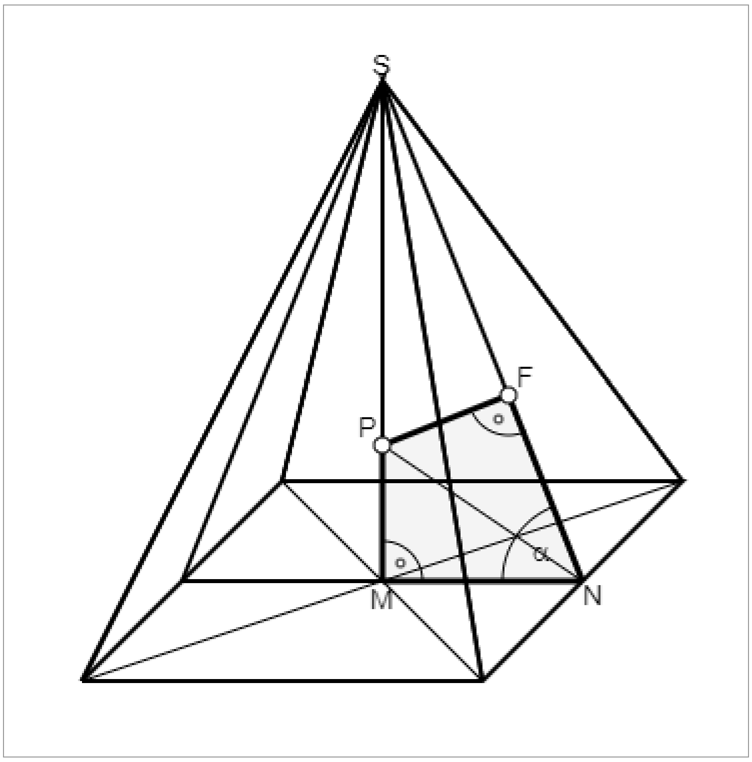
2. Lösung: I. Hier folgt zunächst eine allgemeine Betrachtung des geometrischen Sachverhalts. Bei einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit Grundkante a und Höhe h errechnet sich der Winkel α zwischen Seitenhöhe und Grundfläche im Parallelschnittdreieck MNS als:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}.$$

Der gesuchte Punkt P soll nach Aufgabenstellung denselben Abstand zur Geraden durch M und N sowie zur Seitenhöhe h_s mit dem (Fuß-) Punkt F besitzen. Die Punkte P und F bilden daher zusammen das Viereck eines Drachens mit zwei rechten Winkeln bei M und bei F. Wegen der Symmetrie der Figur des Drachens zur Spiegelsymmetrieachse durch die Punkte N und P spielt der halbe Winkel α/2 eine wichtige Rolle. Denn im Dreieck MNP gilt nun:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\overline{MP}}{\frac{a}{2}}=\frac{2\overline{MP}}{a} \Leftrightarrow \overline{MP}=\frac{a}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

als Höhe des Punktes P über der Pyramidengrundfläche.



II. Die regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkantenlänge a = 8 LE und die Höhe h = 10 LE. Wir bestimmen zuerst den Winkel α zwischen Seitenhöhe und Grundfläche mit:

$$\tan\alpha=\frac{2h}{a}=\frac{2\cdot 10}{8}=2{,}5 \Rightarrow \alpha=68{,}2^\circ .$$

Der halbe Winkel ist dann:

$$\frac{\alpha}{2}=68{,}2^\circ : 2=34{,}1^\circ .$$

Gemäß I. errechnet sich die Höhe des gesuchten Punktes P über der Pyramidengrundfläche als:

$$\overline{MP}=\frac{a}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{8}{2}\cdot\tan(34{,}1^\circ)=2{,}7082 .$$

III. Binden wir die regelmäßige quadratische Pyramide mit Grundkante von 8 LE und Höhe von 10 LE Länge noch ein in das x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem der analytischen Geometrie, so haben die Ecken der Pyramide ABCDS die Koordinaten: A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), S(0|0|10), Der gesuchte Punkt P mit gleichem Abstand von allen Pyramidenflächen besitzt somit die Koordinaten:

P(0|0|2,7082).

(LE = Längeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 01.2022 / Aufgabe 1547