Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Quadratische Pyramiden

Aufgabe: Pyramiden, deren quadratische Grundfläche ABCD auf der x_1-x_2-Grundebene mit den Ecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0) liegt, haben ein Volumen von 128 VE. Gesucht sind Spitzen der Pyramiden, die auf der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

liegen.

1. Lösung: I. Die Pyramidenecken lauten: A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), als Flächeninhalt der quadratischen Pyramidengrundfläche ABCD ergibt sich: $G = 8^2 = 64$ FE. Eine quadratische Pyramide mit Volumen 128 VE hat demgemäß eine Höhe von:

$V = Gh/3 \Rightarrow 128 = 64h/3 \Rightarrow h = 3\cdot128/64 = 6$ LE.

II. Die Höhe h = 6 LE steht senkrecht auf der x_1-x_2-Grundebene, die die quadratische Pyramidengrundfläche ABCD enthält. Die gesuchten Pyramidenspitzen liegen nach Voraussetzung auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und müssen einen Abstand von h = 6 LE von der x_1-x_2-Grundebene haben. Es gilt hinsichtlich der x_3-Koordinaten dieser Punkte wegen der x_3-Koordinate der Geradengleichung:

$x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 3 + 3t = 6 \Rightarrow 3 + 3t = 6 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$

$x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3 + 3t = -6 \Rightarrow 3 + 3t = -6 \Rightarrow 3t = -9 \Rightarrow t = -3$.

Einsetzen der ermittelten t-Werte in die Geradengleichung g führt dann auf die zu errechnenden

$$t = 1 \Rightarrow \vec{OS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(-4|4|6)$$

$$t = -3 \Rightarrow \vec{OS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(8|-4|-6).$$

III. Wir fassen zusammen: Es gibt zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche ABCD und einem Volumen V = 128 VE. Pyramide 1 oberhalb der x_1-x_2-Grundebene wird durch die Pyramidenecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), S_1(-4|4|6) begrenzt, Pyramide 2 unterhalb der x_1-x_2-Grundebene durch die Ecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), S_2(8|-4|-6).

2. Lösung: I. Die Pyramidenecken lauten: A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), als Flächeninhalt der quadratischen Pyramidengrundfläche ABCD ergibt sich: $G = 8^2 = 64$ FE. Eine quadratische Pyramide mit Volumen 128 VE hat demgemäß eine Höhe von:

$V = Gh/3 \Rightarrow 128 = 64h/3 \Rightarrow h = 3\cdot 128/64 = 6$ LE.

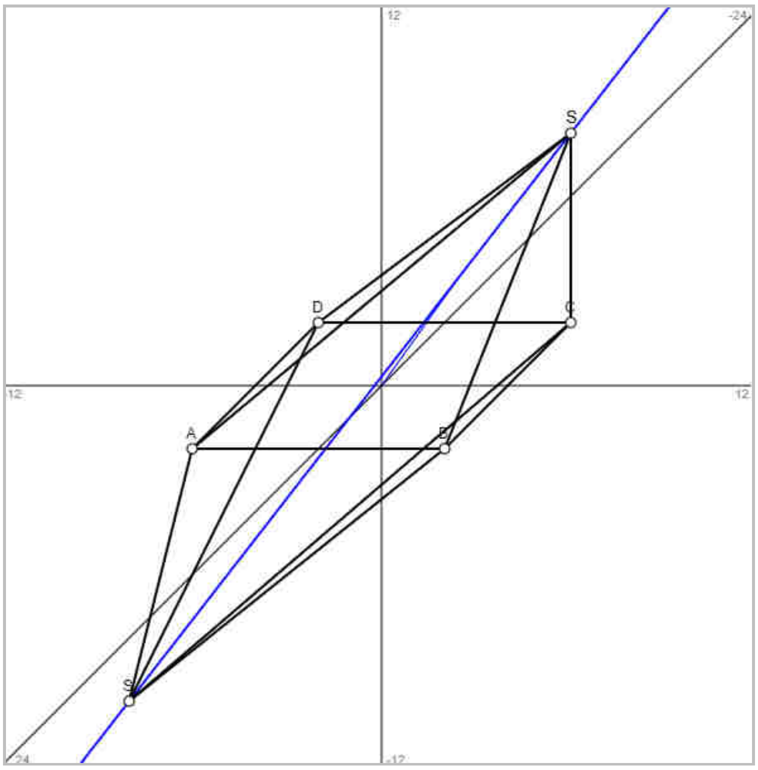
II. Wegen der Höhe h = 6 LE werden Punkte auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gesucht, die von der die Pyramidengrundfläche ABCD enthaltenden x_1-x_2-Grundebene den (senkrecht auf der Grundebene stehenden) Abstand 6 LE besitzen. Aus den Koordinaten der Geradengleichung ergibt sich, dass eine Pyramidenspitze sich als Punkt auf der Geraden als S(-1-3t|2+2t|3+3t) darstellen lässt. Gemäß der Hesseschen Normalform zur Berechnung des Abstands zwischen einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und einer Ebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$, also gemäß $d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ folgt mit E: $x_3 = 0$ als x_1-x_2-Grundebene:

$d(S,E) = \frac{|0+0+3+3t-0|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{|3+3t|}{1} = |3+3t| = 6 \Leftrightarrow 3+3t = \pm 6 \Leftrightarrow 3t = -3 \pm 6 \Leftrightarrow t = -1 \pm 2 \Leftrightarrow$ t = -3, t = 1.

Die gesuchten Spitzen der offensichtlich zwei Pyramiden lauten damit durch Einsetzen der errechneten t-Werte in S(-1-3t|2+2t|3+3t):

t = 1 => $S_1(-1-3\cdot 1|2+2\cdot 1|3+3\cdot 1) = S_1(-4|4|6)$
t = -3 => $S_2(-1-3\cdot(-3)|2+2\cdot(-3)|3+3\cdot(-3)) = S_2(8|-4|-6)$.

III. Wir fassen zusammen: Es gibt zwei <u>Pyramiden</u> mit quadratischer Grundfläche ABCD und einem Volumen V = 128 VE. Pyramide 1 oberhalb der x_1-x_2-Grundebene wird durch die Pyramidenecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), $S_1(-4|4|6)$ begrenzt, Pyramide 2 unterhalb der x_1-x_2-Grundebene durch die Ecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), $S_2(8|-4|-6)$.



(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit, VE = Volumeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 09.2022 / Aufgabe 1701